N34S

✵ Banque filière PT ✵

Epreuve de Mathématiques II-A

Durée 4 h

L'utilisation de tout matériel électronique est interdite.

Exercice I

On désigne par α et β deux constantes réelles vérifiant $\alpha < \beta$.

I.1 Soit H une fonction continue sur le segment $[\alpha, \beta]$, à valeurs réelles ou complexes. On note $P(x)$ la partie réelle de $H(x)$ et $Q(x)$ la partie imaginaire de $H(x)$. En revenant à la définition de l'intégrale comme limite de sommes finies, démontrer la relation :

$$\left|\int_\alpha^\beta H(x)\,dx\right| \leq \int_a^\beta |H(x)|\ dx.$$

I.2 En écrivant l'inégalité précédente non plus pour la fonction H, mais pour la fonction H^2, donner le signe de

$$\left|\int_\alpha^\beta P(x)\,Q(x)\,dx\right| - \left(\int_\alpha^\beta P^2(x)\,dx \times \int_\alpha^\beta Q^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

I.3 Dans les questions I.3 et I.4, on note p et q deux constantes réelles strictement positives vérifiant la relation $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Soit a une constante réelle positive ou nulle. Etudier la fonction φ définie sur R^+ par la relation :

$$\varphi(b) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - a\,b.$$

En déduire que tous les réels positifs ou nuls a et b vérifient l'inégalité :

$$a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Quelle est la valeur de $a^p - b^q$ lorsque l'égalité $a\,b = \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ est vérifiée ?

I.4 Soient f et g deux fonctions continues sur $[\alpha, \beta]$ à valeurs réelles ou complexes. En notant $A = \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$, $B = \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q \, dx \right)^{1/q}$, puis, lorsque le produit AB n'est pas nul, $a = f(x)/A$ et $b = g(x)/B$, comparer

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,dx \right| \text{ et } \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \times \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q \, dx \right)^{1/q}.$$

Ces deux quantités peuvent-elles être égales ?

Exercice II

La question II.1 est indépendante des suivantes.

On désigne par E l'espace euclidien réel orienté de dimension 3, et par $(O, \overrightarrow{\imath_0}, \overrightarrow{\jmath_0}, \overrightarrow{k_0})$ un repère orthonormé direct de E. Soient $t \mapsto \overrightarrow{i(t)}$, $t \mapsto \overrightarrow{j(t)}$, $t \mapsto \overrightarrow{k(t)}$ trois applications de classe C^1 de R dans E telles que $(O, \overrightarrow{i(t)}, \overrightarrow{j(t)}, \overrightarrow{k(t)})$ soit un repère orthonormé direct pour tout t réel.

II.1 En dérivant par rapport à t les relations $\overrightarrow{i(t)} . \overrightarrow{i(t)} = 1$, $\overrightarrow{i(t)} . \overrightarrow{j(t)} = 0$, $\overrightarrow{i(t)} . \overrightarrow{k(t)} = 0$, etc., montrer que, pour tout t, il existe un vecteur $\overrightarrow{\omega(t)}$ noté $a(t)\,\overrightarrow{i(t)} + b(t)\,\overrightarrow{j(t)} + c(t)\,\overrightarrow{k(t)}$ tel que :

$$\frac{d\overrightarrow{i(t)}}{dt} = \overrightarrow{\omega(t)} \wedge \overrightarrow{i(t)}, \quad \frac{d\overrightarrow{j(t)}}{dt} = \overrightarrow{\omega(t)} \wedge \overrightarrow{j(t)}, \quad \frac{d\overrightarrow{k(t)}}{dt} = \overrightarrow{\omega(t)} \wedge \overrightarrow{k(t)}.$$

Soit $t \mapsto \overrightarrow{V(t)} = \xi(t)\,\overrightarrow{i(t)} + \eta(t)\,\overrightarrow{j(t)} + \zeta(t)\,\overrightarrow{k(t)}$ une fonction de classe C^1 de R dans E. Exprimer les composantes du vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{V(t)}}{dt}$ dans la base $(\overrightarrow{i(t)}, \overrightarrow{j(t)}, \overrightarrow{k(t)})$ en fonction de $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ et de leurs dérivées par rapport à t.

II.2 On désigne par A, B et C trois constantes réelles vérifiant $0 < A < B < C$. On admettra qu'il existe une unique application $t \mapsto (p(t), q(t), r(t))$ de classe C^1 de R dans R^3 vérifiant pour tout t le système :

$$\begin{aligned} A\,p'(t) + (C - B)\,q(t)\,r(t) = 0, \\ B\,q'(t) + (A - C)\,r(t)\,p(t) = 0, \\ C\,r'(t) + (B - A)\,p(t)\,q(t) = 0, \end{aligned}$$

et les conditions $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$, $r(0) = r_0$, où p_0, q_0 et r_0 sont trois constantes non toutes nulles données.

Montrer qu'il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que l'on ait pour tout t les deux relations :

$$\begin{aligned} A\;\, p^2(t) + B\;\, q^2(t) + C\;\, r^2(t) = c_1, \\ A^2\, p^2(t) + B^2\, q^2(t) + C^2\, r^2(t) = c_2. \end{aligned}$$

II.3 Soient le point $M(t)$ et ses coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ définis par

$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\overrightarrow{i(t)} + y(t)\overrightarrow{j(t)} + z(t)\overrightarrow{k(t)} = \frac{1}{\sqrt{c_1}}\left(p(t)\overrightarrow{i(t)} + q(t)\overrightarrow{j(t)} + r(t)\overrightarrow{k(t)}\right).$$

Le point $M(t)$ appartient donc aux deux surfaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ d'équations respectives, dans le repère $(O, \overrightarrow{i(t)}, \overrightarrow{j(t)}, \overrightarrow{k(t)})$, $A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 = 1$ pour $\mathcal{E}_1$ et $A^2\,x^2 + B^2\,y^2 + C^2\,z^2 = \frac{c_2}{c_1}$ pour $\mathcal{E}_2$. Préciser la nature géométrique de ces surfaces.

Dans l'espace euclidien R^2, chacune des applications $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \mapsto (y(t), z(t))$, $t \mapsto (z(t), x(t))$ définit une courbe incluse dans une conique. Pour chacune de ces trois courbes, déterminer une équation de la conique qui la contient, en précisant sa nature, puis ses éléments de symétrie et ses asymptotes éventuelles.

II.4 On suppose désormais que le vecteur $A\,p(t)\,\overrightarrow{i(t)} + B\,q(t)\,\overrightarrow{j(t)} + C\,r(t)\,\overrightarrow{k(t)}$ reste constant lorsque t varie. Ecrire dans le repère $(O, \overrightarrow{i(t)}, \overrightarrow{j(t)}, \overrightarrow{k(t)})$ l'équation cartésienne du plan $\Pi(t)$ tangent en $M(t)$ à $\mathcal{E}_1$. Donner un vecteur normal à $\Pi(t)$. Calculer la distance de l'origine O à $\Pi(t)$. Que peut-on dire de $\Pi(t)$ lorsque t varie ?

Exercice III

Les deux questions de cet exercice peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Soient a et b deux constantes réelles vérifiant $a < b$.

Soit f une fonction donnée continue sur $[a, b]$ et à valeurs réelles.

On se propose de résoudre le problème suivant : déterminer une fonction y vérifiant l'équation différentielle

$$y''(x) = f(x)$$

sur $[a, b]$ et les deux conditions $y(a) = 0$, $y(b) = 0$.

III.1 On note $g(t) = c + \int_a^t f(s)\,ds$ et $h(x) = d + \int_a^x g(t)\,dt$ où c et d sont des constantes. En appliquant le théorème de Fubini, démontrer que le problème posé admet une solution et une seule qui s'écrit sous la forme :

$$y(x) = \int_a^x G_1(s, x)\,f(s)\,ds + \int_x^b G_2(s, x)\,f(s)\,ds,$$

où chacune des fonctions G_1 et G_2 est le produit d'un polynôme de degré 1 en x et d'un polynôme de degré 1 en s.

Mettre cette solution y sous la forme

$$y(x) = \int_a^b G(s, x)\,f(s)\,ds,$$

où G est une fonction que l'on décrira explicitement.

III.2 Soient T_1 et T_2 les deux triangles du plan définis par

$$T_1 = \{(x, y),\ a \le y \le x \le b\},\ T_2 = \{(x, y),\ a \le x \le y \le b\}.$$

On note H la fonction définie sur le carré $C = [a, b] \times [a, b]$ par

$$H(x, y) = \begin{cases} (a - y)(b - x) & \text{si } (x, y) \in T_1, \\ (a - x)(b - y) & \text{si } (x, y) \in T_2. \end{cases}$$

Montrer que H est bien définie sur C.

Montrer que H admet une valeur minimale sur C et que cette valeur minimale est strictement négative.

Quelle est cette valeur minimale ?

Exercice IV

On désigne par $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé direct de l'espace euclidien orienté de dimension 2.

Soit R une constante réelle strictement positive.

Soit Γ la courbe de représentation paramétrique :

$x(\theta) = R(\theta - \sin\theta)$, $y(\theta) = R(\cos\theta - 1)$, pour θ décrivant $[-2\pi, 2\pi]$.

On note $M(\theta)$ le point de coordonnées $x(\theta)$ et $y(\theta)$ dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

IV.1 Représenter graphiquement Γ.

IV.2 Calculer la longueur $s(\theta)$ de l'arc de la courbe Γ d'origine le point O et d'extrémité le point $M(\theta)$.

IV.3 Dans cette question, on note Γ_1 l'arc de Γ qui est décrit par $M(\theta)$ lorsque θ décrit seulement le segment $[-\pi, \pi]$. Soit $\overrightarrow{\tau}(\theta)$ le vecteur unitaire tangent à Γ_1 en $M(\theta)$ tel que le produit scalaire $\overrightarrow{\tau}(\theta).\overrightarrow{\jmath}$ soit négatif ou nul.

Déterminer $\overrightarrow{\tau}(\theta)$.

On désigne par $P(\theta)$ le point défini par la relation $\overrightarrow{MP(\theta)} = (4R - s(\theta))\,\overrightarrow{\tau}(\theta)$. Quelles sont les coordonnées dans $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ de $P(\theta)$ en fonction de R, de θ, de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$?

Montrer que la courbe décrite par $P(\theta)$ lorsque θ décrit $[-\pi, \pi]$ se déduit d'une partie de la courbe Γ par une translation que l'on précisera.

IV.4 Soit Γ_2 l'arc de Γ décrit par $M(\theta)$ lorsque θ décrit seulement le segment $[0, 2\pi]$. Soit g une constante réelle strictement positive et soit σ_0 une constante appartenant à l'intervalle $[0, 8R]$.

Dans cette question, on suppose que θ est une fonction de t appartenant à R^+, où t peut donc représenter le temps et où θ est suffisamment dérivable pour les calculs qui vont suivre. On note alors $\sigma(t) = s(\theta(t))$.

Ecrire $\overrightarrow{\tau(\theta(t))}\,.\,\overrightarrow{\jmath}$ sous une forme faisant apparaître $\sigma(t)$ mais ne faisant pas apparaître explicitement θ.

Déterminer la solution de l'équation différentielle $\sigma''(t) = -g\,\overrightarrow{\tau}(\theta(t)).\overrightarrow{\jmath}$ vérifiant $\sigma(0) = \sigma_0$ et $\sigma'(0) = 0$ explicitement en fonction de t, de R, de σ_0 et de $\omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{R}}$.