⁂ Banque filière PT ⁂

Epreuve de Mathématiques II-B

Durée 4 h

ERRATUM

Dans la partie III on supposera les fonctions $\hat{h}$ et $\check{h}$ de classe C^1.

Dans les questions III 3. b. et III 3. c. on lira $e^{2i\pi n\tau}$ au lieu de $e^{2i\pi nt}$.

❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques II-B

Durée 4 h

L'USAGE DE TOUT MATERIEL ELECTRONIQUE EST INTERDIT.

Toutes les réponses seront justifiées.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

E est l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues, C^1 par morceaux, périodiques de période 1.
E_1 désigne l'ensemble des fonctions paires de E, et E_2 l'ensemble des fonctions impaires de E.

On introduit les applications :

$$a_0 : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto a_0(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt \quad ,$$

$$a_n : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto a_n(f) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\cos(2\pi n t)\,dt \quad ,\ n \in \mathbb{N}^* \ ,$$

$$b_n : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto b_n(f) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sin(2\pi n t)\,dt \quad ,\ n \in \mathbb{N} \ ,$$

$$c_n : E \to \mathbb{C},\ f \mapsto c_n(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,e^{-2i\pi n t}\,dt \quad ,\ n \in \mathbb{N} \ .$$

On dira, dans ce qui suit, qu'une fonction est égale à la somme de sa Série de Fourier si elle vérifie :

$$f(t) = \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\,e^{2i\pi n t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\,e^{2i\pi n t} \ .$$

I. Décomposition en Série de Fourier

1. Rappeler la définition d'une fonction C^1 par morceaux.
   Toute fonction de E est-elle égale à la somme de sa Série de Fourier?

2. Montrer que toute application f de E peut s'écrire de façon unique comme somme d'une application f_1 de E_1 et d'une application f_2 de E_2. Que peut-on en déduire pour E_1 et E_2 ?

3. *a.* Montrer que, pour tout entier n, a_n et b_n sont des applications linéaires.
   b. f étant un élément de E, exprimer $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ en fonction de $a_n(f)$, $b_n(f)$.

4. *a.* Montrer que, pour toute application f_1 de E_1 , $a_n(f_1) = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} f_1(t) \cos(2\pi n t)\, dt$.

b. Montrer que, pour toute application f_2 de E_2, $b_n(f_2) = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} f_2(t) \sin(2\pi n t)\, dt$.

5. Soit f_3 la fonction 1 – périodique, égale à $1 - t^2$ sur [- ½ , ½] .

a. Tracer le graphe de la fonction f_3 sur l'intervalle [- 1 , 1].

b. Pour tout entier n, calculer $a_n(f_3)$, $b_n(f_3)$.

c. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, puis de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

II. Approximation d'une fonction continue

Pour tout entier k, on désigne par e_k la fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{i2\pi kt}$.
Soit V l'espace engendré par les fonctions e_k . On désigne par f , dans cette partie, une fonction continue, périodique de période 1, non nulle.

1. On considère les fonctions :

$$g : \begin{array}{ccc} [-½,½] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1 + \cos 2\pi t \end{array} \quad , \quad g_n : \begin{array}{ccc} [-½,½] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & D_n(1 + \cos 2\pi t)^n \end{array}$$

où n est un entier, et D_n une constante réelle. On suppose de plus que $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g_n(t)\,dt = 1$.

On introduit : $I_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 + \cos 2\pi t)^n\, dt$, $J_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\cos \pi t)^{2n}\, dt$.

a. Etudier les variations des fonctions g et g_n.
b. Calculer J_n , par récurrence.
c. Déterminer une relation liant I_n et J_n .
d. En déduire : $D_n = \frac{1}{I_n} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$.

2. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$.

a. On considère la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Montrer que $v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive A telle que :

$$|v_n| \le \frac{A}{n^2} \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty .$$

Quelle est la nature de la série $\left(\sum v_n\right)$?

b. En déduire l'existence d'un réel $B > 0$ tel que :

$$n! \sim B n^n e^{-n} \sqrt{n} \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty .$$

c. En déduire un équivalent de D_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis la limite de D_n lorsque n tend vers $+\infty$.

d. Tracer, sur un même graphique, et en choisissant une échelle adaptée, les courbes représentatives respectives des fonctions g et g_n.

3. Etude de $K_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) g_n(t)\,dt - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(0) g_n(t)\,dt$.

a. Soit ε un réel strictement positif.
Montrer qu'il existe un réel η dans] 0, ½ [tel que, pour tout t de $]-\eta, \eta[$: $|f(t)-f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

b. Montrer que : $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(\eta) = 0$.

c. En utilisant le résultat de la question 3. *b.*, montrer qu'il existe un entier n_1 tel que, pour $n \geq n_1$, alors, pour tout t de $[-½, -\eta[\cap]\eta, ½]$:

$$g_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad , \text{ où } M = 2 \sup_{t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} |f(t)| .$$

d. En déduire que, pour $n \geq n_1$, alors, pour tout t de $[-½, -\eta[\cap]\eta, ½]$:

$$|f(t)-f(0)|\, g_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

e. Calculer la limite de K_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(u) = \int_{-\frac{1}{2}+u}^{\frac{1}{2}+u} f(t) g_n(t-u)\,dt$.

a. Déduire de la question précédente que :

$$\lim_{n \to \infty} [f_n(u) - f(u)] = 0 .$$

b. Montrer, pour tout t de [-½ , ½], que $g_n(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$g_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k\, e^{2i\pi k t} ,$$

où les α_k sont des coefficients à exprimer en fonction de n et k.

c. En déduire que toute fonction périodique et continue peut être approximée par une somme finie de fonctions trigonométriques.

III. Théorème d'échantillonnage

Soit H l'espace des fonctions h définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt$ existe.

h étant un élément de H, on introduit les fonctions $\hat{h}$ et $\check{h}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\hat{h}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{2i\pi t\tau} dt \quad , \quad \check{h}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-2i\pi t\tau} dt .$$

On suppose que $\hat{h}$ et $\check{h}$ sont telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{h}(\tau)\right| d\tau$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\check{h}(\tau)\right| d\tau$ existent, et ~~que~~ :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\tau)\, e^{-2i\pi t\tau} d\tau .$$

On note F le sous espace de H tel que, pour tout élément f de F, $\hat{f}$ et $\check{f}$ soient nulles en dehors de [-½ , ½].

1. *a.* Vérifier que, pour tout élément h de H, $\hat{h}$ et $\check{h}$ sont bien définies.

   b. Vérifier que, pour tout élément h de H, $\check{h} = \overline{\hat{h}}$, où $\overline{\hat{h}}$ désigne le conjugué (complexe) de $\hat{h}$, et que : $\check{\hat{h}} = h$. On admettra que, de même, $\hat{\check{h}} = h$.

2. Montrer que, pour tout élément h de H, $\hat{h}$ et $\check{h}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $\hat{h}$ et $\check{h}$ sont–elles continues ?

3. Soit f un élément de F. On désigne par $\tilde{g}$ la fonction de période 1 qui coïncide avec $\hat{f}$ sur $[-½, ½]$.

   a. En utilisant les relations reliant f et $\hat{f}$, calculer les coefficients $c_n(\tilde{g})$ définis au début du problème en fonction de valeurs de f.

   b. Montrer que, pour tout réel t : $f(t) = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, e^{2i\pi n t}\, e^{-2i\pi t \tau} \right\} d\tau$.

   c. En admettant que l'on a aussi : $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(n)\, e^{2i\pi n t}\, e^{-2i\pi t \tau}\, d\tau \right\}$

   en déduire, pour tout réel t : $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{\sin \pi(n-t)}{\pi(n-t)}$.

   d. Comment peut-on interpréter ce dernier résultat ?

L'analyse du signal requiert des outils mathématiques nécessaires pour pouvoir assurer stockage, transmission, ou encore tout simplement pour pouvoir reconstruire un signal $f(t)$. Une première approche consiste à le décomposer en ondes sinusoïdales (séries de Fourier). Le théorème d'échantillonnage permet, à partir d'un nombre fini de mesures, de le reconstituer au mieux. Les récents développements ont conduit à l'introduction d'ondelettes, obtenues en faisant varier l'intervalle d'intégration des coefficients de Fourier et en remplaçant les fonctions trigonométriques par d'autres familles de fonctions. L'application $\hat{f}$ est une transformation de Fourier, qui permet une représentation, dans l'espace des fréquences, du signal $f(t)$.