❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On identifiera un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à la fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$.
Enfin, P' et P'' désigneront respectivement les polynômes dérivés de P et P'.

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = X \quad ; \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^\star \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}.$$

Dans tout le problème et sauf avis contraire, n désigne un entier naturel.

PARTIE A

1. Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.
2. Quel est le degré de T_n et son coefficient dominant ?
3. Étudier la parité de T_n.
4. Calculer $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.
5. Montrer que T_n est le seul polynôme qui vérifie :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

6. Dans cette question uniquement, on suppose que l'entier n est non nul.
   (a) Pour quelles valeurs de θ a-t-on : $T_n(\cos\theta) = 0$?
   (b) Montrer alors que T_n possède n racines réelles distinctes dans $[-1,\ 1]$. Conclure.
7. Déterminer les racines de T_n'.

PARTIE B

On définit les applications L et N de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad L(P) = \sup_{t\in[-1,\,1]} |P(t)| \quad ; \quad N(P) = \max_{0\le k\le n} |a_k|.$$

On considère enfin l'application φ de $\mathbb{R}[X]^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\,(P,\ Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad \varphi(P,\ Q) = \int_0^{\pi} P(\cos\theta) Q(\cos\theta)\, d\theta.$$

1. Soient P et Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$; montrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} L(P) = 0 \iff P = 0 \quad &\text{et} \quad N(P) = 0 \iff P = 0\ ; \\ L(\lambda P) = |\lambda| L(P) \quad &\text{et} \quad N(\lambda P) = |\lambda| N(P)\ ; \\ L(P+Q) \le L(P) + L(Q) \quad &\text{et} \quad N(P+Q) \le N(P) + N(Q). \end{aligned}$$

2. Montrer que $\gamma_n = n+1$ vérifie :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad L(P) \le \gamma_n N(P).$$

3. Donner un exemple de polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$L(Q) = \gamma_n N(Q).$$

   Que peut-on en déduire ?
4. Calculer $L(T_n)$.

5. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
6. Soit n et m deux entiers naturels distincts. Calculer $\varphi(T_n,\, T_n)$ et $\varphi(T_n,\, T_m)$.
7. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k.$$

   Vérifier alors que pour tout entier $k \in \{0,\, 1, \cdots, n\}$ on a :

$$|\alpha_k| \leq 2L(P).$$

8. Dans cette question uniquement, l'entier n est strictement positif. Montrer que :

$$N(T_{n+1}) \leq 2N(T_n) + N(T_{n-1}).$$

9. On pose $q = 1 + \sqrt{2}$. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad N(T_n) \leq q^n.$$

10. En déduire que l'on a :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X] \quad N(P) \leq q^{n+1}\sqrt{2}L(P).$$

PARTIE C

On définit l'application Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad \Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour tout entier $k \in \{0,\, 1, \cdots, n\}$, déterminer $\Phi(X^k)$.
3. En déduire $\ker(\Phi)$.
4. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique $(1,\, X,\, X^2, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Calculer la trace de Φ.
6. Quelles sont les valeurs propres de Φ ? L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
7. Déterminer les sous-espaces propres de Φ.