⚙ Banque filière PT ⚙

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit

A rendre avec la copie :

4 feuilles de papier millimétré.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultat non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Partie I

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit α un réel.

1. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation
$$x^2+2y^2-z^2=0.$$
   (a) Quelle est la nature de $\mathcal{S}$?
   (b) Quelle est la nature de l'intersection entre $\mathcal{S}$ et un plan d'équation $z=\alpha$? (on pourra séparer plusieurs cas en fonction des valeurs du paramètre α).
   Dessiner la courbe obtenue pour $\alpha=1$ (on précisera les points d'intersection entre la courbe et les axes de coordonnées).

(c) Quelle est la nature de l'intersection entre $\mathcal{S}$ et un plan d'équation $x = \alpha$? Dessiner la courbe obtenue pour $\alpha = 1$ (on précisera les éléments caractéristiques de la courbe : sommets, asymptotes, ...).

2. Soit q la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = y^2 + 2xz.$$

(a) Pour tout couple de réels (x, z), donner une relation entre $x\,z$, $(x + z)^2$, et $(x - z)^2$.

(b) Ecrire q comme combinaison linéaire de trois carrés.

(c) Déterminer une transformation orthogonale $\phi : (x, y, z) \longmapsto (X, Y, Z)$ telle que

$$q(x, y, z) = aX^2 + bY^2 - aZ^2$$

où a et b sont des constantes positives que l'on précisera.
Quelle est la nature de l'application ϕ ?

3. On considère la quadrique $\mathcal{S}_1$ d'équation

$$y^2 + 2xz - 2x = 0.$$

Quelle est la nature de $\mathcal{S}_1$? Préciser le centre de cette quadrique.

4. On note $\mathcal{P}_1$ l'intersection entre $\mathcal{S}_1$ et le plan xOy. Quelle est la nature de $\mathcal{P}_1$?

5. Donner une équation cartésienne du cône $\mathcal{C}_1$ ayant pour sommet le point de coordonnées $(1, 1, 1)$, s'appuyant sur la courbe $\mathcal{P}_1$.

6. Soit A le point de coordonnées (x_A, y_A, z_A), $z_A \neq 0$. On désigne par $\mathcal{C}_A$ le cône de sommet A et s'appuyant sur $\mathcal{P}_1$.

(a) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}_A$.

(b) A quelle condition sur (x_A, y_A, z_A) le point B de coordonnées $(1, 1, 1)$ appartient-il à $\mathcal{C}_A$?

(c) Déterminer l'ensemble des sommets des cônes de $\mathbb{R}^3$ contenant $\mathcal{P}_1$ et le point B.

Partie II

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les surfaces d'équations respectives

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &: x^2 + y^2 - 8z = 0 \\ \mathcal{Q} &: x^2 + y^2 + 2z = 0. \end{aligned}$$

1. (a) Quelle est la nature des surfaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$?

(b) Vérifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des surfaces de révolution, et déterminer, pour chacune d'elles, leur axe.

(c) Donner l'allure de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sur un même dessin.

2. On appelle méridienne de $\mathcal{P}$ une courbe obtenue comme intersection de $\mathcal{P}$ avec un plan contenant l'axe (Oz).
   (a) Déterminer la nature de la méridienne contenue dans le plan d'équation $y = 0$.
   (b) En utilisant les symétries du problème, déterminer la nature de toutes les méridiennes.
3. (a) Soit a un réel strictement positif. Déterminer l'équation de la tangente à la méridienne de $\mathcal{P}$ passant par le point $(a, 0, \frac{a^2}{8})$.
   (b) Déterminer l'intersection de cette tangente avec le plan d'équation $z = 0$.
   (c) En déduire que l'intersection de cette tangente avec $\mathcal{Q}$ est réduite à deux points.
   (d) Montrer que l'intersection avec $\mathcal{Q}$ de toute tangente à une méridienne de $\mathcal{P}$, distincte de la tangente à l'origine, est réduite à deux points.
4. On considère, pour un angle θ fixé, les vecteurs $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ définis par

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$

   Quelles sont les équations cartésiennes des surfaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ dans le repère $(O; \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta), \vec{k})$?
5. Tout point M de $\mathbb{R}^3$ est repéré par la donnée des paramètres (r, θ, z) (coordonnées cylindriques) tels que

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) + z\vec{k}.$$

   Donner une équation paramétrique de la surface $\mathcal{P}$ en fonction des paramètres r et θ.
6. Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée définie, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, par

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \\ z(\theta) = \frac{r(\theta)^2}{8} \end{cases}$$

   où r est une fonction de θ. Vérifier que tout point de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{P}$.
7. On suppose que la fonction r de la question précédente est de classe $\mathcal{C}^1$. On considère le vecteur $\vec{t}(\theta) = x(\theta)\vec{\imath} + y(\theta)\vec{\jmath} + z(\theta)\vec{k}$.
   Donner, en fonction de θ, $r(\theta)$ et $r'(\theta)$, les coordonnées du vecteur $\frac{d\vec{t}}{d\theta}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, puis dans la base $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta), \vec{k})$.
   A quelle condition la courbe précédente est-elle régulière ? On supposera dorénavant cette condition vérifiée.
8. Donner, dans le repère $(O; \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta), \vec{k})$, une représentation paramétrique de la tangente D_θ à la courbe $\mathcal{C}$ au point de paramètre θ.
9. Montrer que la droite D_θ et la surface $\mathcal{Q}$ ont au plus deux points d'intersection.
10. Montrer que D_θ est tangente à $\mathcal{Q}$ si et seulement si

$$r'(\theta)^2 = 4r(\theta)^2.$$

Partie III

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la courbe Γ dont une équation en coordonnées polaires est donnée par :

$$\rho = e^{2\theta}.$$

1. Donner la pente de la tangente à la courbe au point de paramètre θ.
2. Calculer $\lim\limits_{\theta\to-\infty} \rho(\theta)$ et $\lim\limits_{\theta\to+\infty} \rho(\theta)$.
   Qu'en déduisez-vous quant à l'allure de la courbe Γ ?
3. Calculer la longueur de l'arc compris entre les points d'angle polaire 0 et π.
4. Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre l'arc précédent et l'axe des abscisses.
5. Déterminer le repère de Frenet associé à Γ au point de paramètre θ.
6. Déterminer le rayon de courbure de Γ au point de paramètre θ.
7. (a) Rappeler la définition de la développée d'une courbe.
   (b) Quelle est la développée de la courbe Γ ?
8. Dessiner sur un même dessin la courbe Γ et sa développée.

Les deux premières parties de ce problème étudient des lieux de points de l'espace satisfaisant une même propriété géométrique. On obtient une surface dans le premier cas, une courbe tracée sur une surface dans le second cas. La troisième partie étudie certaines propriétés caractéristiques de la spirale logarithmique (une des courbes solution du problème de la partie II).