❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

L'objet de ce problème est d'étudier certaines propriétés de la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

I. Première partie

1. Montrer que, pour tout réel x de $]-1, +\infty[$: $\ln(1+x) \leq x$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , et tout réel t de $]0, \sqrt{n}[$:

$$\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n} \text{ et } \ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \leq \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

4. Soit n un entier naturel non nul.

a. On rappelle que, pour tout réel de $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$: $\operatorname{cotan} x = \dfrac{1}{\tan x}$.

En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n} \operatorname{cotan} u$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$ peut s'exprimer en fonction de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} u \, du$.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{n} dt$ peut s'exprimer en fonction de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u \, du$.

c. Déduire des résultats précédents que :

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u \, du \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} u \, du$$

5. En utilisant le fait que, lorsque N tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^N u \, du$ est équivalent à $\sqrt{\dfrac{\pi}{2N}}$, en déduire la valeur des intégrales $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$, et $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Deuxième partie

On note, pour tout réel x :

$$F(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

1. Rappeler l'expression du développement en série entière autour de 0 de la fonction exponentielle.

2. *a.* La fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est-elle développable en série entière autour de 0 ?

b. En déduire que la fonction qui, à tout réel x, associe $\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$, est développable en série entière autour de 0 .

On admettra, dans ce qui suit, que F est développable en série entière autour de 0.

3. Montrer que, pour tout réel x :

$$F'(x) = x F(x) + 1$$

4. En posant, pour tout réel x : $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, déterminer la valeur de a_0, la valeur de a_1, ainsi qu'une relation de récurrence reliant, pour tout entier $n \geq 1$, a_{n+1} à a_{n-1}.

5. Exprimer, pour tout entier naturel $p \geq 0$, a_{2p} et a_{2p+1}.

6. *a*. Quelle est la limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$?

b. En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Troisième partie

On se propose, dans cette partie, de calculer les intégrales I et J par une autre méthode que celle de la première partie.

On considère l'application g, définie pour tout réel positif x par :

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}} d\theta$$

et l'application f, définie pour tout réel positif x par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$$

1. *a*. g est-elle continue sur $[0, +\infty[$?

b. g est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?

2. On définit, pour tout réel positif x, l'application h par :

$$h(x) = f^2(x) + g(x)$$

Montrer que h est une application constante (on pourra, pour $g'(x)$, considérer le changement de variable $u = \tan\theta$)

3. *a.* Montrer que, pour tout réel positif x :

$$0 \leq g(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$$

b. Quelle est la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$?

En déduire la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$, puis les valeurs des intégrales $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Quatrième partie

On se propose, dans cette partie, de calculer les intégrales I et J par une autre méthode que celle de la troisième partie.

Pour tout réel $R > 0$, on introduit :

$$D_R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq R^2 \right\} , \quad C_R = [-R,R]^2$$

$$I_R = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \quad , \quad J_R = \iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

1. Calculer I_R en fonction de R.

2. Comparer I_R, J_R et $I_{\sqrt{2}R}$, et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

La fonction $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ *, appelée fonction erreur de Gauss, ou fonction erf, possède de nombreuses applications en mécanique : ainsi, en mécanique statistique, elle permet de déterminer la répartition des vitesses dans un gaz parfait.*