

✱ Banque filière PT ✱

## Epreuve de Sciences Industrielles A

Durée 5 h

**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.**

---

**L'usage de calculatrices est autorisé.**

**Aucun document n'est autorisé.**

Ce document se compose :

- d'une présentation du sujet : 5 pages ;
- du travail demandé (4 parties **indépendantes** I, II, III et IV) : 21 pages ;
- des annexes : 2 pages ;
- un cahier réponses à rendre avec votre copie : 10 pages.

Il est demandé au candidat :

- de traiter chacune des parties sur des **copies séparées** en indiquant sur celles-ci le numéro de la partie correspondante ;
- de formuler toutes les hypothèses qu'il jugera nécessaires pour répondre aux questions posées ;
- de rédiger tous les calculs en **littéral** avant de faire, si elles sont demandées, les applications numériques ;
- d'**encadrer** les réponses finales.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

**Tournez la page S.V.P.**



# Système de distribution à calage variable pour moteur quatre temps

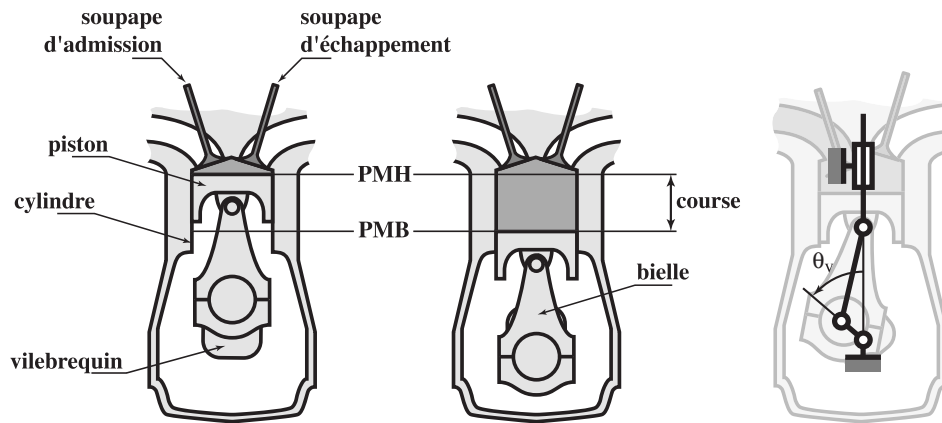
Le moteur à combustion interne (cf. **Figure 1**), encore appelé moteur à explosion, est utilisé pour assurer la propulsion de la plupart de nos véhicules actuels. Il transforme l'énergie thermique, due à la combustion d'un mélange carburé avec de l'air, en énergie mécanique, utilisée pour actionner les roues du véhicule. Pour cela, la pression générée par la combustion permet la mise en mouvement d'un piston dont le déplacement alternatif est transformé en rotation par l'intermédiaire d'un système bielle-manivelle schématisé sur la **Figure 2**.



**Figure 1** • Moteur 6 cylindres en ligne (© BMW 2006)

## 1 Principe de fonctionnement d'un moteur quatre temps

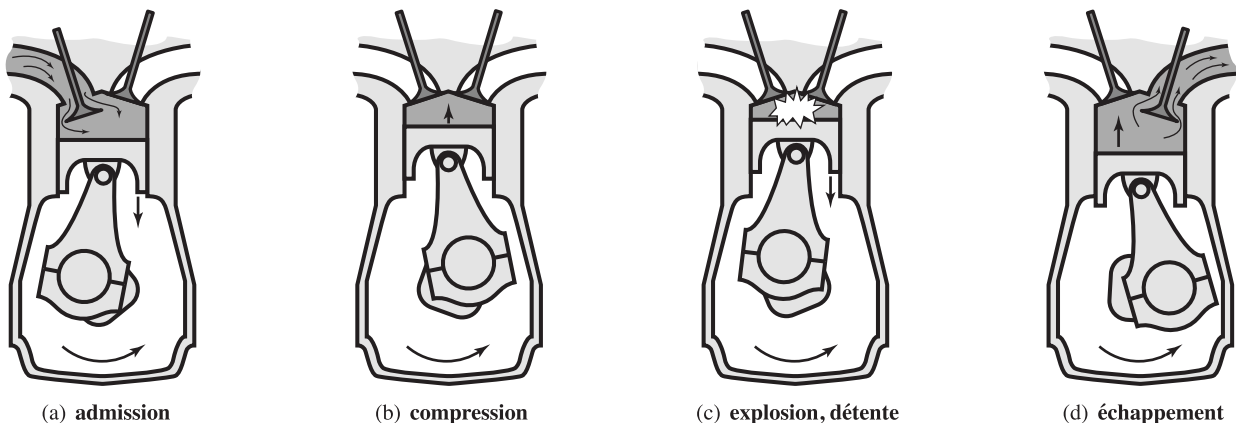
La **Figure 2** présente le moteur dans les deux positions extrêmes du **piston**, appelées point mort haut (**PMH**) et point mort bas (**PMB**). Le mouvement du piston dans sa chambre de combustion (ou **cylindre**) est transmis sous forme de rotation à l'arbre moteur (ou **vilebrequin**, angle de rotation  $\theta_v$ ) par l'intermédiaire d'une **bielle**. Le système de distribution représenté comporte une **soupape d'admission** et une **soupape d'échappement** qui permettent respectivement d'assurer le remplissage du cylindre en mélange carburé puis l'évacuation des gaz après combustion. Dans la réalité, le moteur comporte plusieurs cylindres dont chacun compte plusieurs soupapes d'admission et d'échappement. Afin de simplifier la présentation, un seul cylindre, alimenté par une soupape d'admission et une soupape d'échappement, a été représenté.



**Figure 2 •** Schématisation du moteur dans les deux positions extrêmes du piston

Le fonctionnement du moteur est régi à la fois par des paramètres dynamiques, liés à la cinématique du système bielle-vilebrequin, et par des paramètres thermodynamiques, liés aux transformations du mélange gazeux dans la chambre de combustion. La grande majorité des moteurs à combustion interne fonctionne suivant un cycle à quatre temps donc les caractéristiques sont représentées sur la **Figure 3**. Les quatre phases de fonctionnement du **cycle théorique** sont :

- admission** : après ouverture de la soupape d'admission (**OA**), le piston descend, créant une dépression qui aspire dans la chambre de combustion le mélange d'air et d'essence. La soupape d'échappement reste fermée ;
- compression** : après fermeture de la soupape d'admission (**FA**), le piston remonte, comprimant les gaz enfermés dans la chambre de combustion ;
- explosion puis détente** : la bougie crée une étincelle qui enflamme les gaz comprimés (allumage **All**). La combustion se développe et la pression croît rapidement. La soupape d'admission et la soupape d'échappement étant toujours fermées, la détente des gaz pousse le piston vers le bas ;
- échappement** : l'ouverture de la soupape d'échappement (**OE**) provoque une évacuation des gaz brûlés sous l'effet de leur propre pression, suivie d'une poussée du piston qui remonte. La soupape d'admission reste fermée. La fermeture de la soupape d'échappement, lorsque le piston a atteint sa position haute, conclue le cycle.

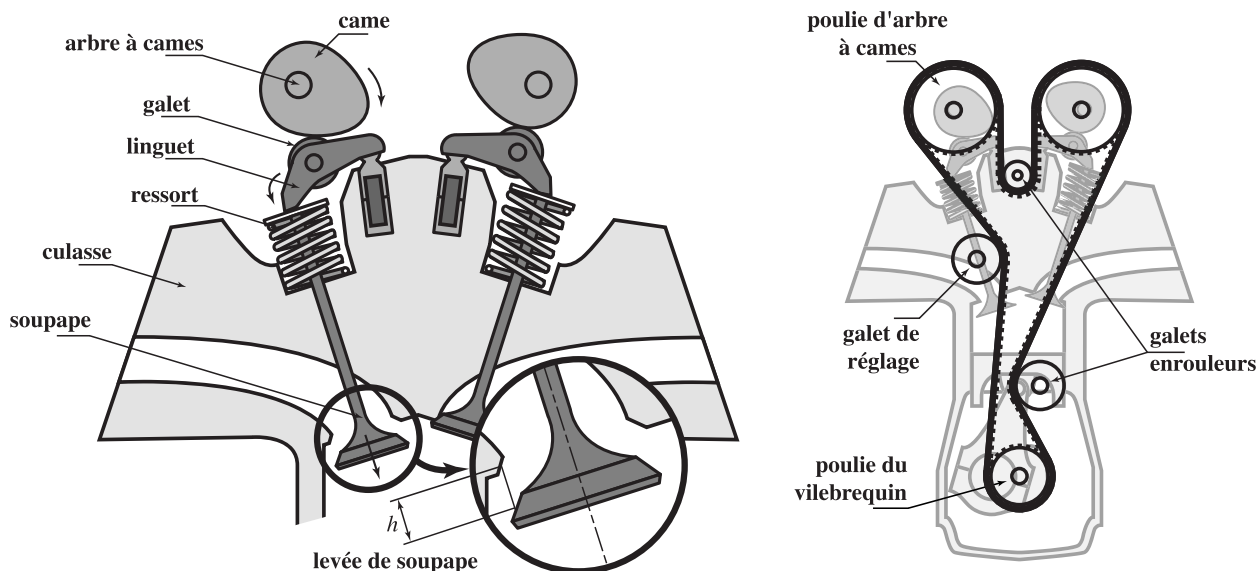


**Figure 3 •** Les 4 temps du fonctionnement du moteur



## 2 Système de distribution classique

Le pilotage du mouvement des soupapes par rapport à celui du piston est réalisé par le **système de distribution**. Celui-ci pilote donc l'évolution de la section de passage du mélange carburé en définissant la **levée** de la soupape  $h$  en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin  $\theta_v$ . La **Figure 4** schématise un système de distribution classique dans lequel une **came** (encastrée sur un **arbre à cames**) vient actionner un **linguet** par l'intermédiaire d'un **galet**, ce qui permet le déplacement de la **soupape**. Un **ressort** situé entre la soupape et le carter du moteur (ou **culasse**) permet de maintenir les contacts soupape-linguet et linguet-came. La synchronisation de la rotation du **vilebrequin** et des **arbres à cames** (qui actionnent la soupape d'admission et celle d'échappement) est assurée par un système de type poulie-courroie ou poulie-chaîne sur la plupart des modèles de véhicules actuels.



**Figure 4 •** Système de distribution et synchronisation par poulie-chaîne

Pour la soupape d'admission, la **loi de levée idéale**, représentée sur la **Figure 5(a)** haut, serait celle qui offre la section débitante maximale durant toute la phase de transvasement, avec des instants d'ouverture et de fermeture de la soupape qui correspondent aux positions extrêmes (PMH ou PMB) du piston. Cependant, une telle loi présente des vitesses et accélérations infinies, ce qui la rend physiquement irréalisable. De plus, la prise en compte de l'inertie des gaz, de leur temps d'inflammation, des échanges thermiques entre l'intérieur de la chambre et l'extérieur... font que la **loi de levée réelle** est plus proche de celle représentée sur la **Figure 5(a)** bas. On remarque que l'ouverture de la soupape est en avance par rapport à sa position théorique et la fermeture en retard. L'**étalement** de la loi de levée désigne la taille de la plage durant laquelle la soupape est ouverte tandis que le **calage** désigne la position de cette zone par rapport à l'angle de rotation du vilebrequin.

La **Figure 5(b)** représente le **cycle réel** du moteur quatre temps dans un diagramme « pression des gaz dans la chambre – volume de la chambre » sur lequel sont placés les différents points caractéristiques définis précédemment.

Le système de distribution joue donc un rôle central dans le fonctionnement du moteur puisque, en définissant l'**étalement** et le **calage** des soupapes, il influe sur le comportement du système et notamment sur :

- les **performances**, que l'on cherche à augmenter, pour une consommation de carburant donnée ;
- les **émissions polluantes**, que l'on cherche à diminuer, pour répondre aux normes antipollution.

Les réglages optimaux du calage et de l'étalement dépendent de nombreux paramètres, qui varient au cours du fonctionnement du moteur (régime, charge, température...). L'idéal serait donc de les **optimiser en permanence** en fonction de ces paramètres. Sur la majorité des véhicules actuels, on se contente d'introduire un déphasage constant

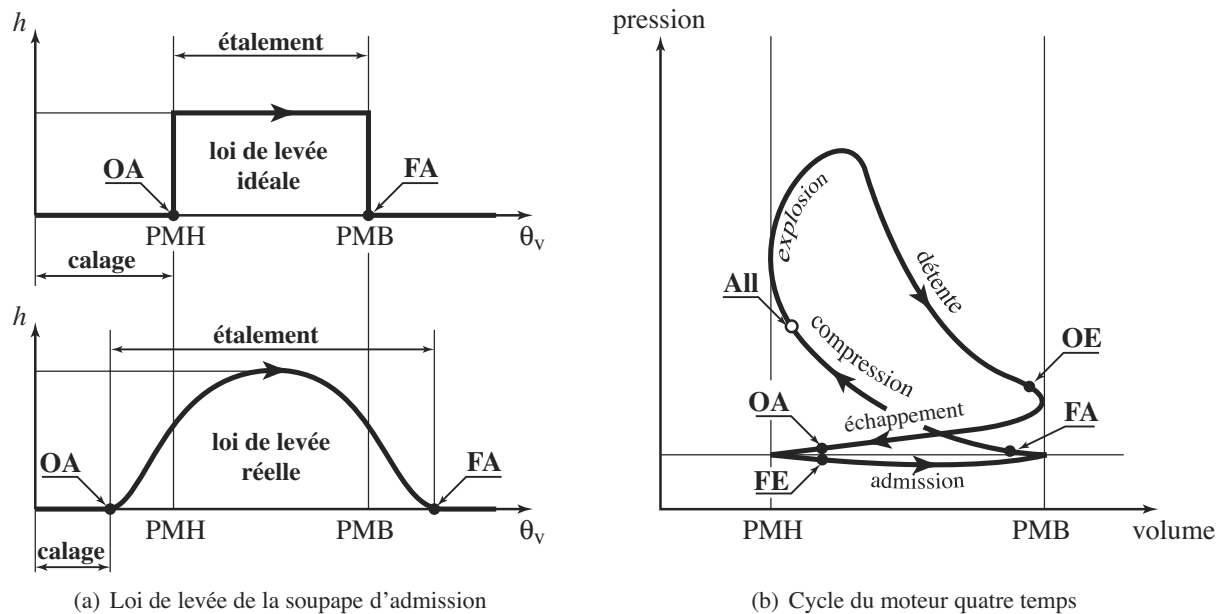


Figure 5 • Correspondance entre cycle et loi de levée

entre l'arbre à cames et le vilebrequin. Ce calage « moyen » permet d'obtenir des performances et une consommation honorables sur toute la plage d'utilisation du moteur, mais la course à la performance et les normes antipollution de plus en plus sévères ont amené les constructeurs à se tourner vers des systèmes de distribution à **calage variable**, c'est-à-dire susceptibles d'optimiser en permanence le calage en fonction du régime moteur et des autres paramètres influents.

### 3 Système de distribution à calage variable

#### 3.1 Introduction

On trouve des systèmes de déphasage chez un nombre croissant de constructeurs automobiles et notamment chez BMW (système Vanos), PSA (EW10A, ES9A), Honda (VTEC), Toyota (VVT-i), Ford (Sigma Zetec-SE) ou Renault (K4)... Ils permettent un réglage optimisé du calage des soupapes en fonction du régime moteur et des autres paramètres influents. Pour des raisons de coût, il n'était souvent implanté que sur le système de soupapes d'admission mais son implantation sur la distribution associée aux soupapes d'échappement tend à se généraliser. On retrouve actuellement le système Vanos sur différents modèles tels que le coupé haut gamme Z4 de chez BMW présenté sur la Figure 6.



Figure 6 • Coupé Z4 de BMW (© BMW 2006)

### 3.2 Principe de fonctionnement

La **Figure A.1** de l'**Annexe A** présente l'implantation du système au sein du moteur tandis que la **Figure A.2** de l'**Annexe A** schématise le fonctionnement du mécanisme pour un des deux arbres à cames.

Le système est installé entre la poulie **1**, entraînée par la chaîne de distribution, et l'arbre à cames **2**, qui ne sont donc plus solidaires comme dans un système de distribution classique. Un système électro-hydraulique (servo-distributeur) permet de commander le déplacement  $x_3$  du piston **3** par rapport à la culasse **0**, ce qui impose un déplacement longitudinal au coulisseau **4**. Celui-ci est relié à la poulie **1** par des cannelures hélicoïdales et à l'arbre à cames **2** par des cannelures droites. Cette cinématique particulière permet de transformer le **déplacement**  $x_3$  du piston en un **déphasage**  $\Delta\theta$  entre l'angle de rotation de la poulie  $\theta_1$  et celui de l'arbre à cames  $\theta_2$ .

Le **calculateur** du véhicule détermine le calage optimal (et donc le déphasage  $\Delta\theta$  correspondant) en fonction du régime du moteur et des autres paramètres influents. L'électro-aimant du servo-distributeur est alors actionné par un courant électrique de commande, généré par une **électronique de contrôle** qui corrige le déphasage de l'arbre à cames en fonction de la consigne générée par le calculateur et des mesures des positions angulaires du vilebrequin  $\theta_v$  et de l'arbre à cames  $\theta_2$ . Ces mesures sont réalisées par deux capteurs de position angulaire (non représentés sur la **Figure A.2**) et les angles de rotation de la poulie  $\theta_1$  et le déphasage  $\Delta\theta$  s'en déduisent aisément.

#### Travail demandé

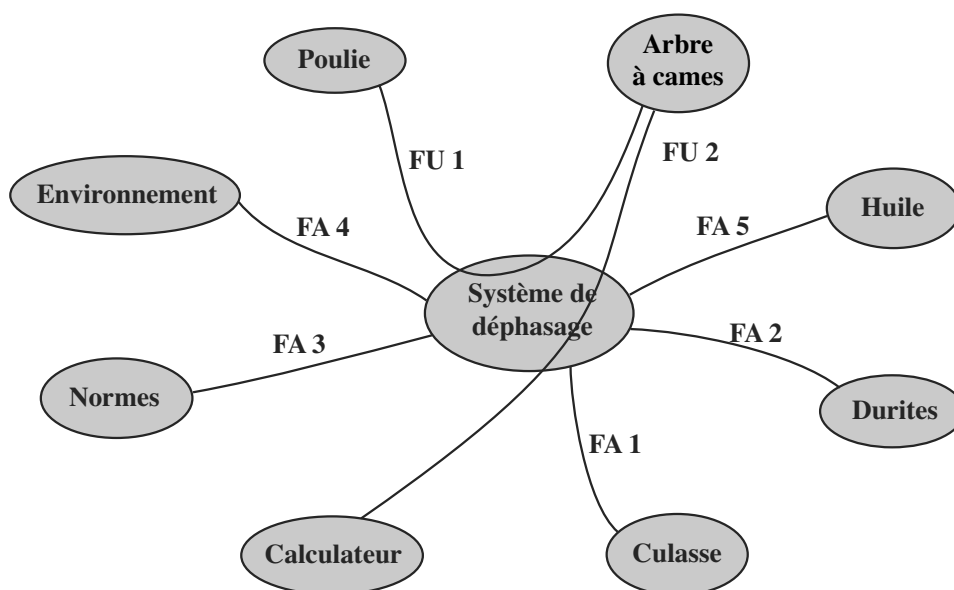
Après une lecture détaillée du sujet (**durée conseillée 30 min**), cette étude est l'occasion de traiter quatre parties indépendantes, elles-mêmes constituées de nombreuses questions qui peuvent être traitées séparément :

- la **Partie I (durée conseillée 30 min)** propose une analyse fonctionnelle partielle externe et interne de celui-ci qui permettra d'appréhender les interactions entre les différents éléments constitutifs ;
- la **Partie II (durée conseillée 2h)** détaille les aspects cinématiques et dynamiques du système avant d'entamer l'étude du risque d'affolement de la distribution afin d'en déduire la puissance nécessaire au pilotage du système de déphasage puis de commenter les choix technologiques qui ont été faits pour celui-ci ;
- la **Partie III (durée conseillée 1h30)** aborde le contrôle du système de déphasage et est l'occasion d'analyser les performances de celui-ci en termes de rapidité et de précision ;
- la **Partie IV (durée conseillée 30 min)**, enfin, s'intéresse aux capteurs de position angulaire qui sont utilisés, ainsi qu'à la technologie de multiplexage employée pour éviter un câblage électrique trop important dans le véhicule.

# Analyse fonctionnelle du système de déphasage

## I.1 Analyse fonctionnelle externe

La prestation attendue est réalisée pendant la phase de vie « accélération maximale » dont la caractérisation partielle des principales fonctions de service est donnée par les **Figure I.1** et **Figure I.2**.



**Figure I.1** • Diagramme APTE partiel - Phase de vie « accélération maximale »

N°	Verbalisation	Critères	Niveau
<b>FU 1</b>	Permettre à la poulie d'entraîner l'arbre à cames	Vitesse de rotation	4000 tr/mn maxi
		Couple transmissible	
<b>FU 2</b>	Permettre au calculateur de contrôler le calage de l'arbre à cames	Ecart statique en poursuite	0
		Temps de réponse	250 ms
<b>FA 1</b>	Etre positionné sur la culasse en permettant un mouvement de rotation autour de l'axe de l'arbre à cames et un mouvement de translation suivant la direction de cet axe	Amplitude du mouvement de rotation	infini
		Amplitude du mouvement de translation	30 mm maxi
		Rigidité des blocages	
<b>FA 2</b>	Permettre la fixation des durites		
<b>FA 3</b>	Etre conforme aux normes en vigueur		
<b>FA 4</b>	Etre adapté à l'environnement		
<b>FA 5</b>	Permettre la lubrification des cannelures du coulisseau		

**Figure I.2** • Caractérisation partielle des fonctions de service

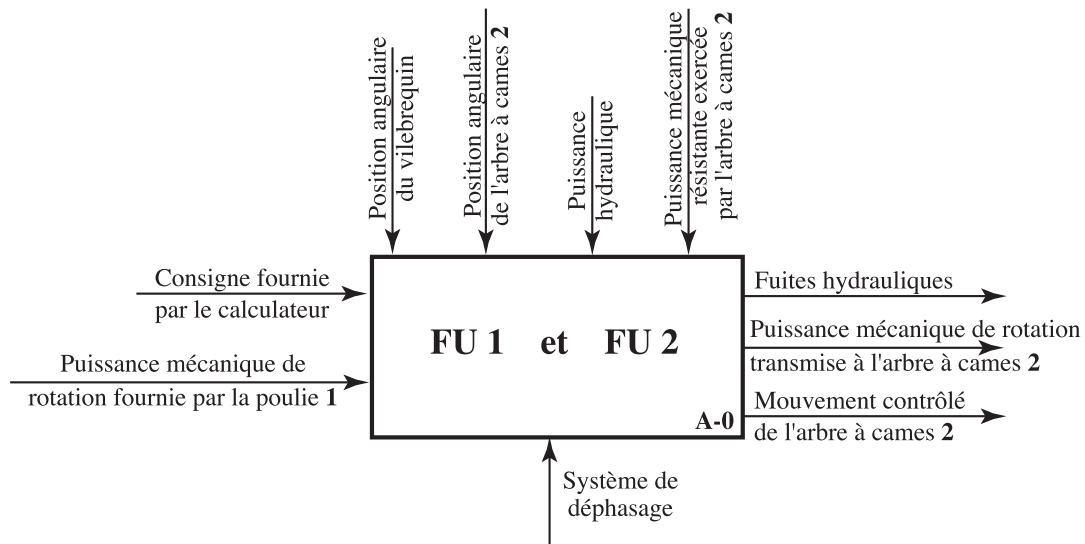
**Question 1**

Expliquer, en au plus 5 lignes, l'utilité de caractériser les fonctions de service et les éléments du milieu extérieur qui interviennent dans un diagramme APTE.

Expliquer, en au plus 5 lignes, pourquoi l'analyse fonctionnelle externe d'un système nécessite la réalisation de plusieurs diagrammes APTE.

## I.2 Analyse fonctionnelle interne

La **Figure I.3** représente le diagramme SADT niveau A-0 du système de distribution incluant le système de déphasage.



**Figure I.3** • Diagramme SADT A-0 du système de distribution avec système de déphasage

**Question 2**

À partir de la description fournie dans la **Présentation**, compléter le diagramme SADT niveau A0 du système de déphasage sur la **Figure 1** du **Cahier Réponses**. Vous préciserez clairement les flux reliant les 4 actigrammes.

Dans cette partie, on s'intéresse aux aspects cinématiques et dynamiques du système. On commence par étudier le risque d'affolement de la distribution afin de calculer la précharge à installer dans les ressorts des soupapes. La connaissance de cette valeur permet de déterminer la puissance à fournir pour actionner le système de déphasage. Enfin, on s'intéresse au dimensionnement de la liaison par cannelures hélicoïdales et on discute le choix du servo-distributeur utilisé pour piloter le système.

## II.1 Notations et hypothèses

Pour simplifier les notations, le référentiel correspondant à un repère  $\mathcal{R}_i$  est lui aussi désigné par  $\mathcal{R}_i$ .

Les torseurs cinématique, cinétique et dynamique du mouvement du solide  $\mathbf{j}$  par rapport au solide  $\mathbf{i}$  (ou par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_i$  lié à celui-ci), exprimés en  $A$ , sont notés respectivement :

$$\mathcal{V}(j/i) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(j/i) \\ \vec{V}(A, j/i) \end{array} \right\}_A, \quad \mathcal{C}(j/i) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_c(j/i) \\ \vec{\sigma}(A, j/i) \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \mathcal{D}(j/i) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_d(j/i) \\ \vec{\delta}(A, j/i) \end{array} \right\}_A$$

Le torseur des actions mécaniques exercées par le solide  $\mathbf{i}$  sur le solide  $\mathbf{j}$ , exprimé en  $A$ , est noté :

$$\mathcal{T}(i \rightarrow j) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(i \rightarrow j) \\ \vec{M}(A, i \rightarrow j) \end{array} \right\}_A \quad \text{ou, en composantes dans une base } (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) : \quad \mathcal{T}(i \rightarrow j) = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{array} \right\}_{A, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Les dérivées première et seconde d'une quantité  $x(t)$  par rapport au temps sont notées  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$  et  $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

**Dans toute cette partie, l'action de la pesanteur sera négligée devant les autres actions mécaniques mises en jeu dans le système.**

## II.2 Préliminaires

Pour le dimensionnement du système, différents calculs de dynamique vont être menés, ce qui conduit à se placer dans des référentiels qui peuvent ou non être considérés comme galiléens.

### Question 3

Donner la définition d'un référentiel galiléen.

Le référentiel terrestre, noté  $\mathcal{R}_g$ , est supposé galiléen. Si les calculs sont menés dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$ , lié à la culasse  $\mathbf{0}$ , il faudrait *a priori* prendre en compte la vitesse et l'accélération du véhicule (donc de la culasse) par rapport au sol. Pour simplifier ces calculs, il est intéressant de vérifier si le référentiel  $\mathcal{R}_0$  peut lui aussi être supposé galiléen.

Pour cela, on considère le véhicule dans la phase de fonctionnement correspondant à un démarrage à accélération maximale (les données du constructeur sont : 5,7 s pour passer de 0 à 100 km/h) et on considère une soupape de masse 55 g, qui subit en fonctionnement un effort de la part du linguet dont la norme peut aller jusqu'à 1500 N.

**Question 4**

En la supposant constante, déterminer la valeur numérique de l'accélération maximale  $\Gamma_{\max}$  du véhicule par rapport au sol durant cette phase. En comparant l'ordre de grandeur de la force d'inertie d'entraînement à celui de l'effort mis en jeu, conclure dans ce cas quant à la validité de l'hypothèse qui consiste à supposer  $\mathcal{R}_0$  galiléen.

Dans tous les cas, dans la suite du sujet, le référentiel  $\mathcal{R}_0$  sera supposé galiléen.

**Question 5**

À partir des explications du fonctionnement du moteur et du système de distribution (voir **Présentation** et **Partie I**), montrer que l'angle de rotation  $\theta_2$  de l'arbre à cames **2** est relié à  $\theta_v$ , celui du vilebrequin, et au déphasage  $\Delta\theta$  par une équation de la forme :

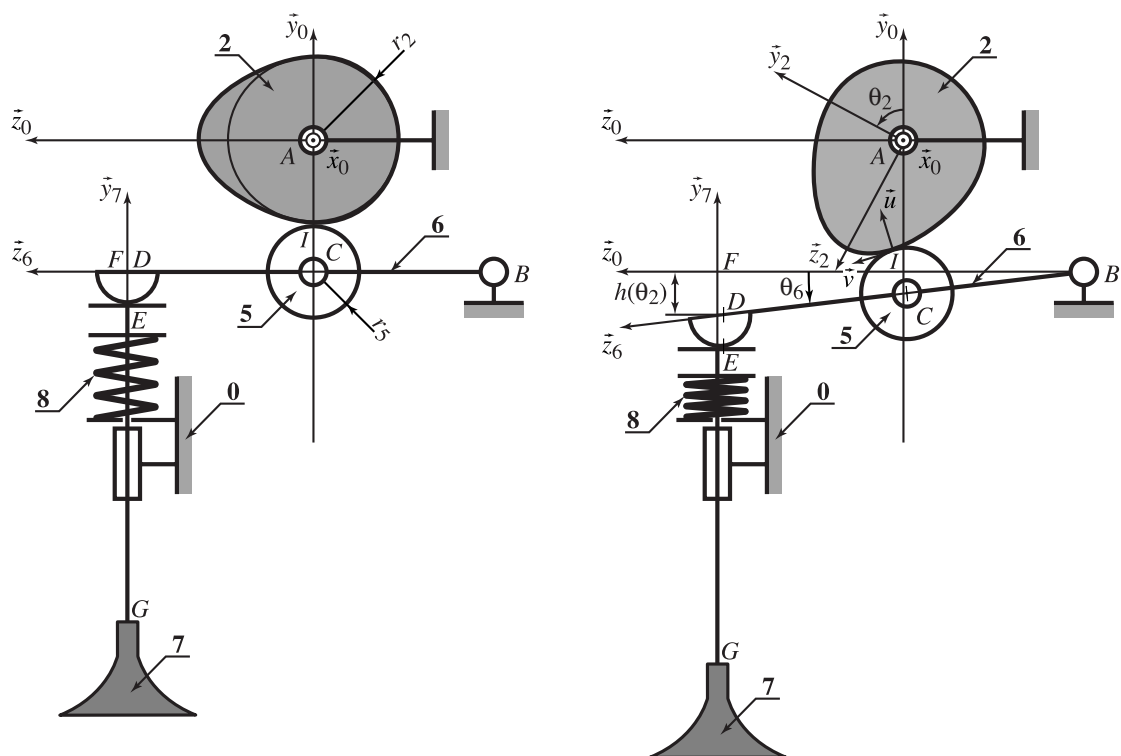
$$\theta_2 = \lambda\theta_v + \Delta\theta$$

dans laquelle  $\lambda$  est une constante dont on précisera la valeur numérique.

### II.3 Calcul du régime d'affolement de la distribution

À haut régime du moteur, les effets d'inertie dus aux mouvements des différentes pièces peuvent être suffisamment importants pour provoquer des décollements entre les organes de distribution. On parle d'**affolement de soupapes**. Ce phénomène se traduit par une désynchronisation de la distribution, ce qui conduit à une perte de puissance, mais parfois aussi à une casse du moteur.

La **Figure II.1** schématise le pilotage de la soupape par came et linguet. On note **2** la came (encastrée sur l'arbre à cames **2** de la **Figure II.3**), **5** le galet, **6** le linguet et **7** la soupape, tous supposés indéformables. Le ressort, déformable, est noté **8**.



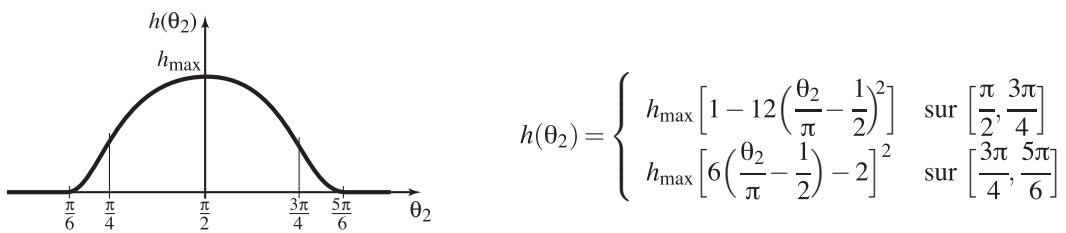
**Figure II.1** • Pilotage de la soupape par came et linguet



- La culasse **0** est munie du repère  $\mathcal{R}_0 = (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .
- La came **2** est liée à la culasse **0** par une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_0)$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est tel que  $\vec{x}_2 = \vec{x}_0$  et on note  $\theta_2 = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$ . Le rayon de la partie cylindrique de la came est noté  $r_2$ .
- Le linguet **6** est lié à la culasse **0** par une liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_0)$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_6 = (B, \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$  est tel que  $\vec{x}_6 = \vec{x}_0$  et on note  $\theta_6 = (\vec{y}_0, \vec{y}_6) = (\vec{z}_0, \vec{z}_6)$ . La masse du linguet est  $m_6$  et son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(B, \vec{x}_6)$  est  $I_6$ .
- Le galet **5** est lié au linguet **6** par une liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x}_0)$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_5 = (C, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  est tel que  $\vec{x}_5 = \vec{x}_0$  et on note  $\theta_5 = (\vec{y}_6, \vec{y}_5) = (\vec{z}_6, \vec{z}_5)$ . Le centre de gravité du galet est  $C$ , son rayon  $r_5$ , sa masse  $m_5$  et son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(C, \vec{x}_5)$  est  $I_5$ .
- La soupape **7** est liée à la culasse **0** par une liaison pivot glissant d'axe  $(G, \vec{y}_0)$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_7 = (G, \vec{x}_7, \vec{y}_7, \vec{z}_7)$  est tel que  $\vec{y}_7 = \vec{y}_0$  et sa position est repérée par la loi de levée  $h = -\vec{F}\vec{D} \cdot \vec{y}_0$  (avec  $h > 0$  qui sera définie par la **Figure II.2**). La masse de la soupape est  $m_7$ .
- Le contact entre la came **2** et le galet **5** a lieu en  $I$  et est modélisé par une liaison sphère-plan d'axe  $(I, \vec{u})$  où le repère  $(I, \vec{u}, \vec{v}, \vec{x}_5)$  est tel que  $\vec{u}$  soit normal à la surface de contact en  $I$ . On note  $\vec{BI} = U\vec{u} + V\vec{v}$ , où  $U(\theta_2)$  et  $V(\theta_2)$  sont des fonctions de l'angle de rotation  $\theta_2$ . L'action mécanique du galet **5** sur la came **2** est modélisée par un glisseur d'axe  $(I, \vec{u})$  et de résultante  $\vec{F}(5 \rightarrow 2) = F_I \vec{u}$ .
- Le contact entre le linguet **6** et la soupape **7** a lieu en  $E$  et est modélisé par une liaison sphère-plan d'axe  $(E, \vec{y}_7)$ . L'action mécanique de la soupape **7** sur le linguet **6** est modélisée par un glisseur d'axe  $(E, \vec{y}_7)$  et de résultante  $\vec{F}(7 \rightarrow 6) = F_E \vec{y}_7$ .
- Le ressort **8** agit entre la culasse **0** et la soupape **7**. On modélise son action mécanique sur la soupape **7** par un glisseur d'axe  $(G, \vec{y}_7)$  et de résultante  $\vec{F}(8 \rightarrow 7) = (F_0 + kh + \frac{m_8}{3}\dot{h})\vec{y}_7$ , où  $F_0 > 0$  est la précharge,  $k$  la raideur et  $\frac{m_8}{3}\dot{h}$  est un terme qui modélise l'influence de la masse  $m_8$  du ressort (qui n'est pas négligeable devant celle des autres solides).
- On note :  $\vec{BC} = \ell \vec{z}_6$ ,  $\vec{BD} = L \vec{z}_6$ ,  $\vec{BF} = L \vec{z}_0$  et  $\vec{DE} = -r_6 \vec{y}_0$ , où  $\ell, L, r_6$  sont des constantes.

**Dans les questions qui vont suivre, toutes les liaisons sont considérées parfaites.**

La loi de levée  $h(\theta_2)$  de la soupape en fonction de l'angle de rotation de l'arbre à cames est représentée sur la **Figure II.2**. La fonction  $h(\theta_2)$  est symétrique par rapport à l'axe  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$  et constituée sur  $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$  de deux paraboles.



**Figure II.2** • Loi de levée  $h(\theta_2)$  de la soupape

Le mouvement du système est complètement défini par la loi de levée  $h(\theta_2)$  et par la **vitesse angulaire de la came**  $\omega_2 = \dot{\theta}_2$  **supposée constante**. On se propose de déterminer  $\omega_{2,\text{aff}}$ , la plus petite vitesse  $\omega_2$  pour laquelle un des contacts risque d'être rompu. Ceci permettra de dimensionner le ressort de rappel de façon à repousser ce phénomène à une vitesse hors de la plage d'utilisation du moteur.



**Question 6**

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la soupape **7**, déterminer l'expression de  $F_E$  en fonction de  $F_0, k, h, \ddot{h}$  et  $m_{\text{eq}} = m_7 + \frac{m_8}{3}$ . Comme, lors de la phase d'ouverture-fermeture de la soupape, la pression dans la chambre du moteur est minimale, l'action mécanique des gaz sur la soupape est supposée nulle.

**Question 7**

Déterminer  $\vec{x}_0 \cdot \vec{\delta}(B, \mathcal{E}/\mathcal{R}_0)$ , la projection sur  $\vec{x}_0$  du moment dynamique en  $B$  de l'ensemble galet-linguet  $\mathcal{E} = \{5 \cup 6\}$ . On l'exprimera en fonction de  $I_5, I_{\text{eq}} = I_5 + I_6 + m_5 \ell^2, \ddot{\theta}_5$  et  $\ddot{\theta}_6$ .

**Question 8**

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble galet-linguet  $\mathcal{E} = \{5 \cup 6\}$ , déterminer l'expression de  $F_I$  en fonction de  $F_E, I_5, I_{\text{eq}}, L, V, \theta_6, \ddot{\theta}_5$  et  $\ddot{\theta}_6$ .

On suppose que la levée maximale  $h_{\text{max}}$  est petite devant la longueur  $L$  du linguet, ce qui conduit aux approximations suivantes :

$$\theta_6 \approx \frac{h}{L} \ll 1 \quad \text{et} \quad \theta_5 \approx -\frac{r_5}{r_2} \theta_2$$

et on rappelle que la vitesse angulaire de la came  $\omega_2 = \dot{\theta}_2$  est supposée constante.

**Question 9**

En posant  $m'_{\text{eq}} = m_{\text{eq}} + \frac{1}{L^2} I_{\text{eq}}$ , montrer que ces approximations conduisent aux expressions suivantes de  $F_E$  et  $F_I$  :

$$\begin{cases} F_E = F_0 + kh + m_{\text{eq}} \ddot{h} \\ \frac{V}{L} F_I = F_0 + kh + m'_{\text{eq}} \ddot{h} \end{cases}$$

et montrer que si  $\ddot{h} < 0$ , il y a risque de décollement. On précisera si ce décollement a lieu d'abord en  $E$  ou en  $I$ .

**Question 10**

En s'intéressant à l'équation de la loi de levée  $h(\theta_2)$  de la **Figure II.2**, déterminer la vitesse d'affolement  $\omega_{2,\text{aff}}$  et la levée  $h_{\text{aff}}$  correspondante en fonction de  $F_0, k, h_{\text{max}}$  et  $m'_{\text{eq}}$ .

On donne les valeurs numériques suivantes :

masse de la soupape	$m_7 = 55 \text{ g}$	longueur du linguet	$L = 60 \text{ mm}$
masse du ressort	$m_8 = 40 \text{ g}$	position du galet	$\ell = 30 \text{ mm}$
masse du galet	$m_5 = 35 \text{ g}$	raideur du ressort	$k = 21\,000 \text{ N m}^{-1}$
moment d'inertie du linguet	$I_6 = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$	levée maximale	$h_{\text{max}} = 10 \text{ mm}$
moment d'inertie du galet	$I_5 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$	régime maximal du moteur	$\dot{\theta}_{v,\text{max}} = 7\,800 \text{ tr min}^{-1}$

**Question 11**

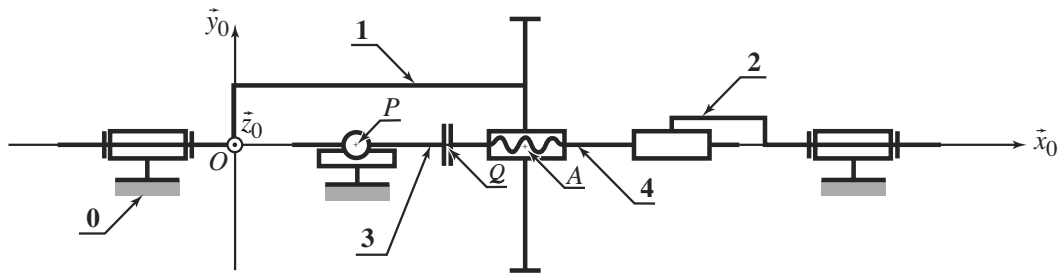
Déterminer la valeur numérique de la précharge  $F_0$  du ressort de soupape qui permet de faire en sorte que le régime d'affolement soit supérieur de 10 % au régime maximal d'utilisation du moteur.

**Question 12**

Déterminer la valeur numérique  $F_{I,\text{max}}$  du maximum de l'effort de contact entre le galet et la came.

## II.4 Analyse globale du mécanisme de déphasage

La **Figure II.3** propose un schéma cinématique du système de déphasage de la **Figure A.2** de l'**Annexe A**. On retrouve la culasse **0**, la poulie d'entraînement **1**, l'arbre à cames **2**, le piston **3** et le coulisseau **4**.



**Figure II.3** • Schéma cinématique du système de déphasage

- La culasse **0** est munie du repère  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .
- La poulie **1** est liée à la culasse **0** par une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est tel que  $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$  et on note  $\theta_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ . La masse de la poulie est  $m_1$  et son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_1)$  est  $I_1$ .
- L'arbre à cames **2** est lié à la culasse **0** par une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x}_0)$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_2 = (O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est tel que  $\vec{x}_2 = \vec{x}_0$  et on note  $\theta_2 = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$ . La masse de l'arbre à cames est  $m_2$  et son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O, \vec{x}_2)$  est  $I_2$ .
- Le piston **3** est lié à la culasse **0** par une liaison sphère-cylindre d'axe  $(P, \vec{x}_0)$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_3 = (P, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est tel que  $\vec{x}_3 = \vec{x}_0$ . La masse du piston est  $m_3$  et son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(P, \vec{x}_3)$  est  $I_3$ .
- Le coulisseau **4** est lié à la poulie **1** par une liaison glissière hélicoïdale d'axe  $(A, \vec{x}_0)$ , au piston **3** par une liaison appui-plan de normale  $\vec{x}_0$  et à l'arbre à cames **2** par une liaison glissière de direction  $\vec{x}_0$ . Le repère lié  $\mathcal{R}_4 = (Q, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  est tel que  $\vec{x}_4 = \vec{x}_0$ , on note  $\Delta\theta = \theta_4 = (\vec{y}_1, \vec{y}_4) = (\vec{z}_1, \vec{z}_4)$  et enfin  $x_4 = \vec{QA} \cdot \vec{x}_4$ . La masse du coulisseau est  $m_4$  et son moment d'inertie par rapport à l'axe  $(Q, \vec{x}_4)$  est  $I_4$ . Le pas  $p_{as}$  de la liaison glissière hélicoïdale entre le coulisseau **4** et la poulie **1** est un pas à droite ( $p_{as} > 0$  exprimé en unité de longueur par tour).

Dans les questions qui vont suivre, toutes les liaisons sont considérées parfaites.

#### Question 13

Établir le graphe des liaisons du mécanisme de la **Figure II.3** (pièces **0, 1, 2, 3, 4**).

#### Question 14

Déterminer le degré d'hyperstatisme et le nombre de mobilités de ce modèle. On précisera la démarche utilisée et la nature des différents termes qui interviennent dans les relations.

## II.5 Détermination de l'effort de commande

On considère toujours le modèle présenté sur la **Figure II.3** et on cherche à déterminer l'effort que doit fournir le vérin **3** afin de déphaser l'arbre à cames **2**, ainsi que l'effort axial au niveau de la liaison glissière hélicoïdale entre **1** et **4**, ce qui permettra de dimensionner celle-ci. Pour cela, on modélise les actions mécaniques extérieures au modèle de la manière suivante :

- l'action mécanique de la chaîne **C** sur la poulie **1** :

$$\mathcal{T}(C \rightarrow 1) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(C \rightarrow 1) \\ \vec{M}(A, C \rightarrow 1) \end{array} \right\}_A \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(C \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = 0 \\ \vec{M}(A, C \rightarrow 1) = M_C \vec{x}_0 \end{array} \right.$$

- l'action mécanique de l'huile **H** sous pression sur le piston **3** :

$$\mathcal{T}(H \rightarrow 3) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(H \rightarrow 3) \\ \vec{M}(P, H \rightarrow 3) \end{array} \right\}_P \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(H \rightarrow 3) = F_H \vec{x}_0 \\ \vec{M}(P, H \rightarrow 3) = \vec{0} \end{array} \right.$$

- l'action mécanique du galet **5** sur l'arbre à cames **2** :

$$\mathcal{T}(5 \rightarrow 2) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(5 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(O, 5 \rightarrow 2) \end{array} \right\}_O \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(5 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_0 = 0 \\ \vec{M}(O, 5 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_0 = L_5 \end{array} \right.$$

On note le torseur cinématique du coulisseau **4** par rapport à la poulie **1** :

$$\mathcal{V}(4/1) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(4/1) = \dot{\theta}_4 \vec{x}_4 \\ \vec{V}(A, 4/1) = \dot{x}_4 \vec{x}_4 \end{array} \right\}_A$$

le torseur des actions mécaniques exercées par la poulie **1** sur le coulisseau **4** :

$$\mathcal{T}(1 \rightarrow 4) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(1 \rightarrow 4) \\ \vec{M}(A, 1 \rightarrow 4) \end{array} \right\}_A$$

et on suppose les grandeurs  $L_5, \ddot{\theta}_1, \Delta\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_4$  connues :

- $L_5$  : couple résistant exercé par le galet **5** sur l'arbre à cames **2**, déterminé à partir des résultats obtenus dans la partie précédente (on néglige le couple résistant dû aux contacts avec les paliers réalisant la liaison pivot entre l'arbre à cames **2** et la culasse **0**) ;
- $\ddot{\theta}_1$  : accélération du mouvement de rotation de la poulie, pouvant être déterminée à partir de l'accélération du régime moteur (rotation du vilebrequin) ;
- $\Delta\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_4$  : accélération du déphasage de l'arbre à cames déterminée à partir de la consigne calculée par le calculateur.

#### Question 15

En fonction des données du problème, déterminer l'expression des quantités  $F_H$ ,  $X_{14}$  et  $\ddot{x}_4$  représentant respectivement :

- $F_H$  : effort que doit exercer l'huile sous pression sur le piston **3** pour imposer le déphasage ;
- $X_{14} = \vec{F}(1 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_4$  : effort transmis par la liaison glissière hélicoïdale suivant la direction  $\vec{x}_4$  ;
- $\ddot{x}_4$  : accélération en translation du coulisseau **4**.

**Avant d'effectuer les calculs, vous exposerez clairement votre démarche (principes ou théorèmes employés, systèmes isolés, directions de projection...).**

## II.6 Discussion sur l'actionneur utilisé pour le pilotage du système

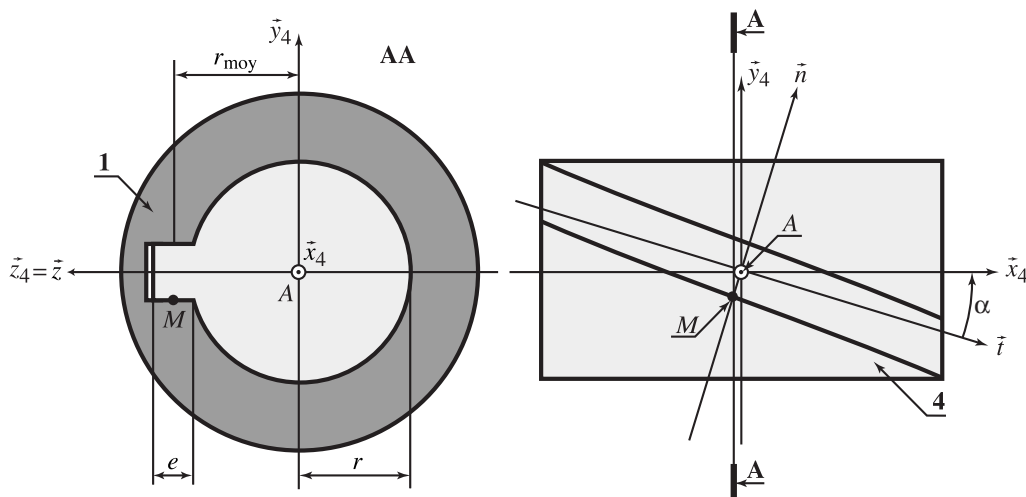
On s'intéresse maintenant à la réversibilité de la liaison glissière hélicoïdale entre la poulie **1** et le coulisseau **4**. Dans les questions qui vont suivre, cette liaison ne peut donc plus être considérée parfaite.

La liaison est réalisée à l'aide de cannelures hélicoïdales à flancs parallèles et, *a priori*, il serait préférable qu'elle soit irréversible. De cette façon, un effort exercé par le piston **3** sur le coulisseau **4** pourrait induire un déphasage, tandis qu'un couple exercé par l'arbre à cames **2** sur le coulisseau **4** ne pourrait pas venir perturber celui-ci. En revanche, si la liaison s'avère réversible, il sera nécessaire de choisir à un actionneur particulier pour éviter que le déphasage soit perturbé.

La **Figure II.4** représente la poulie **1** et le coulisseau **4** avec, pour simplifier, une seule cannelure. Le rayon du coulisseau est  $r$ , la hauteur de la cannelure  $e$ , l'angle d'hélice, calculé sur le rayon moyen  $r_{\text{moy}}$  est noté  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ). Le contact entre la poulie **1** et le coulisseau **4** se fait avec frottement, modélisé par la loi de Coulomb et un coefficient de frottement noté  $f = \tan \phi$ . On suppose que la pression de contact  $p$  qui s'exerce entre **1** et **4** au niveau de la cannelure est uniforme sur toute la surface  $S$  du flanc de la cannelure. On rappelle que le pas de cette liaison (exprimé en unité de longueur par tour) est noté  $p_{\text{as}}$  ( $p_{\text{as}} > 0$ ).

#### Question 16

Exprimer le pas  $p_{\text{as}}$  de la liaison glissière hélicoïdale en fonction des paramètres précédents.



**Figure II.4 • Cannelures hélicoïdales**

On se place dans le cas où  $\dot{\theta}_4 > 0$  et où le contact entre 1 et 4 a lieu sur le flanc de cannelure contenant le point  $M$  (cf. Figure II.4). On considère un élément de surface  $dS$  entourant un point  $M$  de la surface de contact  $S$ .

**Question 17**

Exprimer dans la base locale  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{z})$  les composantes normale  $d\vec{N}$  et tangentielle  $d\vec{T}$  de l'action mécanique exercée par la poulie 1 sur le coulisseau 4 au travers de  $dS$ .

**Question 18**

En supposant la hauteur de la cannelure  $e$  est petite devant le rayon  $r_{\text{moy}}$ , exprimer l'effort axial  $X_{14} = \vec{F}(1 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_4$  et le moment  $L_{14} = \vec{M}(A, 1 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_4$  exercés par la poulie 1 sur le coulisseau 4 en fonction de  $r_{\text{moy}}$ ,  $\alpha$ ,  $\phi$ ,  $p$  et  $S$ .

**Question 19**

En déduire la relation qui lie le moment  $L_{14}$  à l'effort axial  $X_{14}$  en fonction de  $r_{\text{moy}}$ ,  $\alpha$  et  $\phi$ . Pour simplifier cette relation, on utilisera à bon escient l'égalité :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

On cherche à étudier si le moment  $L_{24} = \vec{M}(A, 2 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_4$ , exercé par l'arbre à cames 2 sur le coulisseau 4, peut conduire à une translation du piston 3 par rapport à la poulie 1 et donc à l'introduction d'un déphasage.

**Question 20**

Exprimer la puissance motrice  $\mathcal{P}_m$  développée par le moment moteur  $L_{24}$  dans le mouvement de 4 par rapport à 1. Exprimer la puissance réceptrice  $\mathcal{P}_r$  développée par l'effort récepteur  $X_{34} = \vec{F}(3 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_4$  dans le mouvement de 4 par rapport à 1. Exprimer dans ce cas le rendement  $\eta$  de la liaison glissière hélicoïdale en fonction de  $\mathcal{P}_m$  et  $\mathcal{P}_r$ .

**Question 21**

À partir des expressions précédentes et en appliquant le principe fondamental de la dynamique au coulisseau 4 (en négligeant les termes d'inerties par rapport aux actions mécaniques mises en jeu), montrer que le rendement  $\eta$  peut s'exprimer en fonction de  $\alpha$  et  $\phi$  par la relation :

$$\eta = \frac{\tan(\alpha - \phi)}{\tan \alpha}$$

**Question 22**

En fonction de la valeur des paramètres  $\alpha$  et  $\phi$ , discuter la possibilité d'introduire un déphasage entre la poulie **1** et l'arbre à cames **2** en appliquant un moment  $L_{24}$  sur le coulisseau **4**.

Dans le système de déphasage de la **Figure A.2** de l'**Annexe A**, le contact au niveau des cannelures hélicoïdales est lubrifié et se fait entre deux aciers. Le coefficient de frottement est  $f = 0,1$ . Le rayon moyen sur lequel est calculé l'angle d'hélice  $\alpha$  est  $r_{\text{moy}} = 2 \text{ cm}$ . On souhaite pouvoir introduire un déphasage  $\Delta\theta$  entre l'arbre à cames **2** et la poulie **1** qui peut aller jusqu'à  $15^\circ$ .

**Question 23**

Calculer l'angle d'hélice maximal  $\alpha_{\text{th}}$  qui permet d'avoir un système dans lequel le moment exercé par l'arbre à cames **2** sur le coulisseau **4** ne risque pas de faire varier le déphasage. Calculer la course du piston correspondante, notée  $c_{\text{th}}$ , et commenter ce résultat.

Dans le système réel, l'angle d'hélice est  $\alpha = 20^\circ$ . Comme représenté sur la **Figure A.1** de l'**Annexe A**, le vérin **3** est piloté par un servo-distributeur commandé par un électro-aimant, qui permet de transformer le signal électrique d'entrée en un débit proportionnel de fluide. La partie distributeur est de type 4/3 à centre fermé avec un retour au repos commandé par un ressort de centrage.

**Question 24**

Calculer la course réelle du piston, notée  $c$ . Le moment exercé par l'arbre à cames sur le coulisseau risque-t-il de faire varier le déphasage ? Commenter l'utilisation du servo-distributeur décrit précédemment.

**Question 25**

Proposer une modification du système qui permettrait de conserver l'irréversibilité tout en diminuant la course.

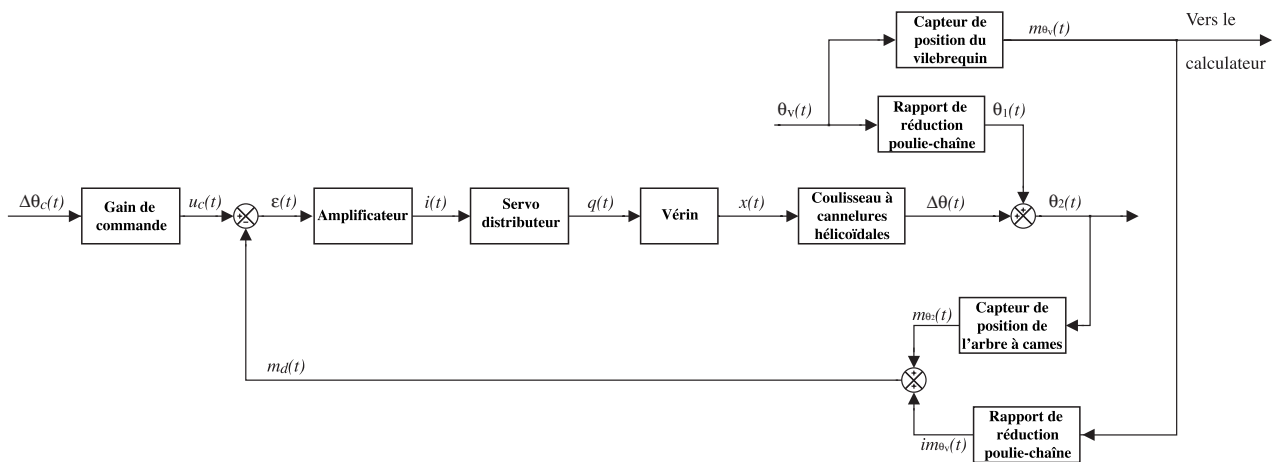
L'objectif de cette partie est de définir l'architecture du système de commande et de déterminer les valeurs numériques de certaines caractéristiques afin d'obtenir un asservissement en poursuite du déphasage. On rappelle que l'actionneur utilisé pour réaliser le déphasage  $\Delta\theta$  de l'arbre à cames est un vérin hydraulique double-effet piloté par un servo-distributeur. La consigne de déphasage  $\Delta\theta_c$  à obtenir est calculée à partir de diverses informations provenant de capteurs de position angulaire implantés sur le vilebrequin (mesure de  $\theta_v$ ) et sur l'arbre à cames (mesure de  $\theta_2$ ), de capteurs thermiques implantés à différents endroits dans le moteur et du capteur d'enfoncement de la pédale d'accélération (consigne du conducteur...). La gestion de ces informations n'est pas abordée dans l'étude proposée.

### III.1 Notations et hypothèses

On notera, lorsque cela est possible, les fonctions dans le domaine temporel par des lettres minuscules (e.g.  $i(t)$ ) et sa transformée de *Laplace* par une lettre majuscule (soit  $I(p)$ ).

**On réalise dans cette Partie III un modèle aux variations, on considérera donc des conditions initiales nulles.**

Le schéma d'asservissement du processus physique et des différents bouclages réalisés est donné sur la **Figure III.1**.



**Figure III.1 • Schéma bloc de l'architecture du système**

On précise :

 $\Delta\theta_c(t)$  : consigne de déphasage

$q(t)$  : débit à l'entrée du vérin

$x(t)$  : déplacement axial du piston du vérin

$\theta_2(t)$  : position angulaire de l'arbre à cames

$\theta_v(t)$  : position angulaire du vilebrequin

$m_d(t)$  : mesure du déphasage

$\varepsilon(t)$  : écart de tension

$u_c(t)$  : tension de commande

$i(t)$  : courant de commande du servo-distributeur

 $\Delta\theta(t)$  : déphasage de l'arbre à cames

$m_{\theta_2}(t)$  : mesure de la position angulaire de l'arbre à cames

$m_{\theta_v}(t)$  : mesure de la position angulaire du vilebrequin

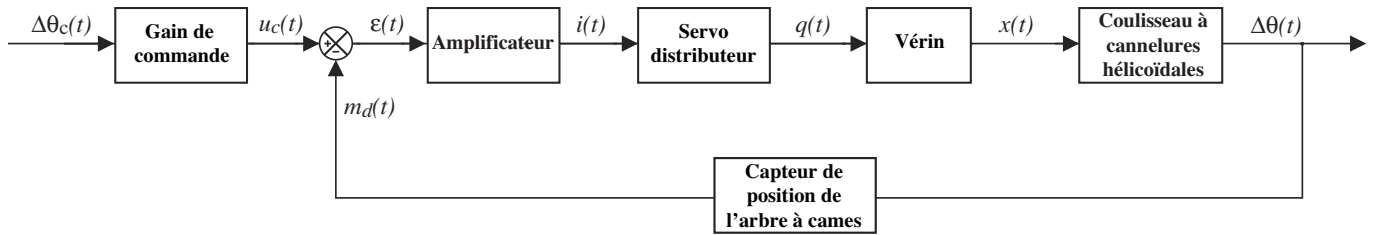
$\theta_1(t)$  : position angulaire de la poulie

$im_{\theta_v}(t)$  : image de la mesure de la position angulaire du vilebrequin

Afin de simplifier la suite de l'étude, on supposera que la position angulaire du vilebrequin  $\theta_v(t)$  est nulle (cela revient à étudier directement le déphasage de l'arbre à cames).

### Question 26

Montrer que le schéma bloc **Figure III.1** donne alors celui de la **Figure III.2** :



**Figure III.2** • Schéma simplifié de l'architecture du système

On considère que les capteurs de mesure des positions angulaires  $\theta_v(t)$  du vilebrequin et  $\theta_2(t)$  de l'arbre à cames sont assimilables à des gains purs de même valeur  $C$ . Le gain de commande est identique au gain du capteur mesurant la position angulaire de l'arbre à cames. Le gain de l'amplificateur est supposé unitaire. Le gain associé au coulisseau à cannelures hélicoïdales est noté  $K_c$ . Le servo-distributeur est modélisé par un gain pur noté  $K_e$ . On considérera les valeurs numériques suivantes :

$$C = 10 \text{ V rad}^{-1} \quad K_c = 18 \text{ rad m}^{-1}$$

## III.2 Analyse du comportement dynamique avec une modélisation de fluide incompressible

Le fluide est modélisé par un comportement incompressible. On néglige les fuites possibles dans le circuit hydraulique. L'équation caractérisant le comportement du vérin hydraulique est alors la suivante (avec  $S$ , la surface utile du piston du vérin) :

$$q(t) = S\dot{x}(t) \quad \text{et} \quad S = 9,6 \text{ cm}^2$$

### Question 27

Après avoir appliqué la transformée de *Laplace* aux différentes équations, compléter le schéma-bloc de la **Figure 2** du **Cahier Réponses**.

### Question 28

Déterminer la Fonction de Transfert en Boucle Fermée  $H_{BF}(p)$  associée à ce schéma. Déterminer la valeur du gain  $K_e$  du servo-distributeur qui entraîne un temps de réponse à 5% de 250 ms.

## III.3 Analyse du comportement dynamique en prenant en compte la compressibilité du fluide

Le modèle précédent est trop simpliste car il ne prend pas en compte des caractéristiques physiques importantes vis-à-vis du comportement réel du système. Il est nécessaire de considérer :

- la compressibilité du fluide ;
- les fuites dans la partie hydraulique.

Pour analyser l'influence de ces deux phénomènes sur le comportement dynamique global du système, il est nécessaire de prendre en compte l'effort résistant exercé par le coulisseau à cannelures hélicoïdales sur le piston du vérin, grandeur physique correspondant à une perturbation. On admettra que les équations simplifiées traduisant le

comportement du vérin en prenant en compte la compressibilité du fluide sont (les fuites ne sont pas introduites dans cette modélisation, leur influence sur le comportement ne sera abordée que dans la partie suivante) :

**pour l'aspect hydraulique :**

$$q(t) = S\dot{x}(t) + \frac{V}{B}\dot{p}(t)$$

$V$  : volume moyen de la chambre du vérin ( $48 \text{ cm}^3$ )  
 $B$  : coefficient de compressibilité de l'huile ( $1500 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ )

**pour l'aspect dynamique :**

$$M\ddot{x}(t) = Sp(t) - F_{1 \rightarrow 4}(t)$$

$p(t)$  : pression utile dans le vérin  
 $F_{1 \rightarrow 4}(t)$  : force exercée par la poulie sur le coulisseau  
 $M$  : masse des parties mobiles en translation ( $500 \text{ g}$ )

#### Question 29

Après avoir appliqué la transformée de *Laplace* aux différentes équations, compléter le schéma-bloc de la **Figure 3** du **Cahier Réponses**.

#### Question 30

Déterminer les fonctions de transfert  $H_Q(p)$  et  $H_F(p)$  qui relient  $Q(p)$  et  $F_{1 \rightarrow 4}(p)$  à  $X(p)$  (voir **Figure III.3**) de la façon suivante :

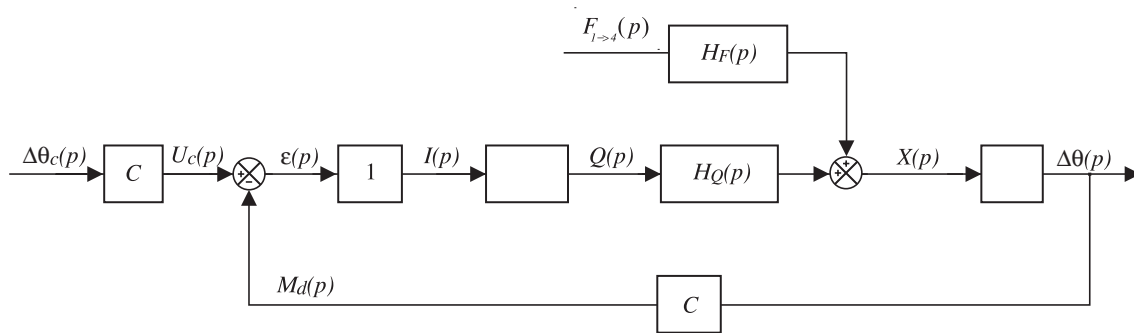
$$X(p) = H_Q(p)Q(p) + H_F(p)F_{1 \rightarrow 4}(p)$$

Modifier leurs expressions afin d'obtenir les formes canoniques suivantes :

$$H_Q(p) = \frac{1}{a_1 p} \frac{1}{1 + a_2 p^2} \quad \text{et} \quad H_F(p) = \frac{a_3}{1 + a_2 p^2}$$

et préciser les expressions littérales et les valeurs numériques des coefficients  $(a_1, a_2, a_3)$  en donnant 4 chiffres significatifs.

Le schéma de la **Figure 3** du **Cahier Réponses** peut donc être transformé sous la forme de la **Figure III.3**.



**Figure III.3** • Schéma simplifié de l'architecture du système

#### Question 31

Appliquer le critère de *Routh* à la modélisation actuelle. Conclure.

### III.4 Étude de l'influence des fuites hydrauliques

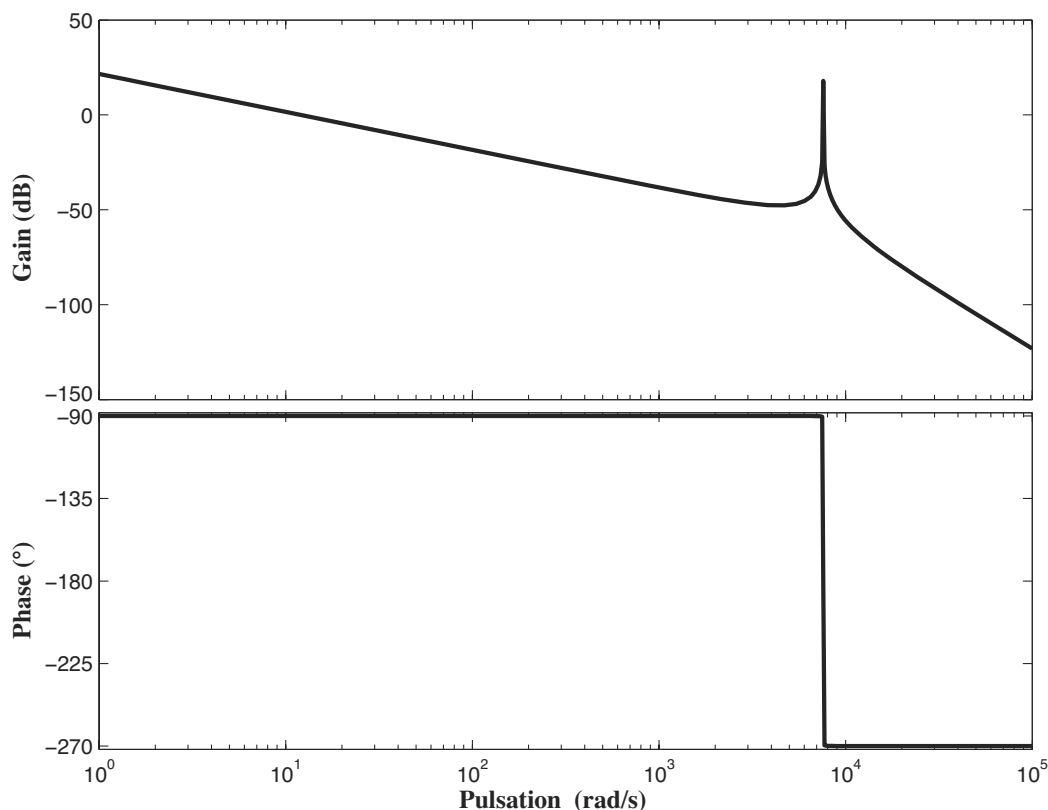
Il existe plusieurs façons de rendre le système stable. Il est possible en particulier d'introduire artificiellement un débit de fuite au niveau du vérin (débit supérieur aux débits de fuites internes qui sont insuffisants pour stabiliser le



comportement dynamique du système). L'introduction de ce débit de fuite dans les équations traduisant le comportement du vérin conduit à la présence d'un coefficient d'amortissement  $\xi_Q$  dans la fonction de transfert  $H_Q(p)$ . On a alors :

$$H_Q(p) = \frac{1}{a_1 p} \frac{1}{1 + \frac{2\xi_Q}{\omega_Q} p + \frac{p^2}{\omega_Q^2}} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{1}{\omega_Q^2}$$

En prenant  $\xi_Q = 0,0001$ , on obtient le diagramme de Bode de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte  $H_{BO1}(p)$  (telle que  $M_d(p) = H_{BO1}(p) U_c(p)$ ) présenté sur la **Figure III.4**.



**Figure III.4** • Diagramme de Bode de la fonction  $H_{BO1}$

#### Question 32

En prenant 3 ou 4 valeurs sur le diagramme de Bode restreint aux pulsations proches de  $10^4$  rad/s (voir **Figure III.5**), compléter le diagramme de *Black* de  $(H_{BO1})$  sur la **Figure 4** du **Cahier Réponses**.

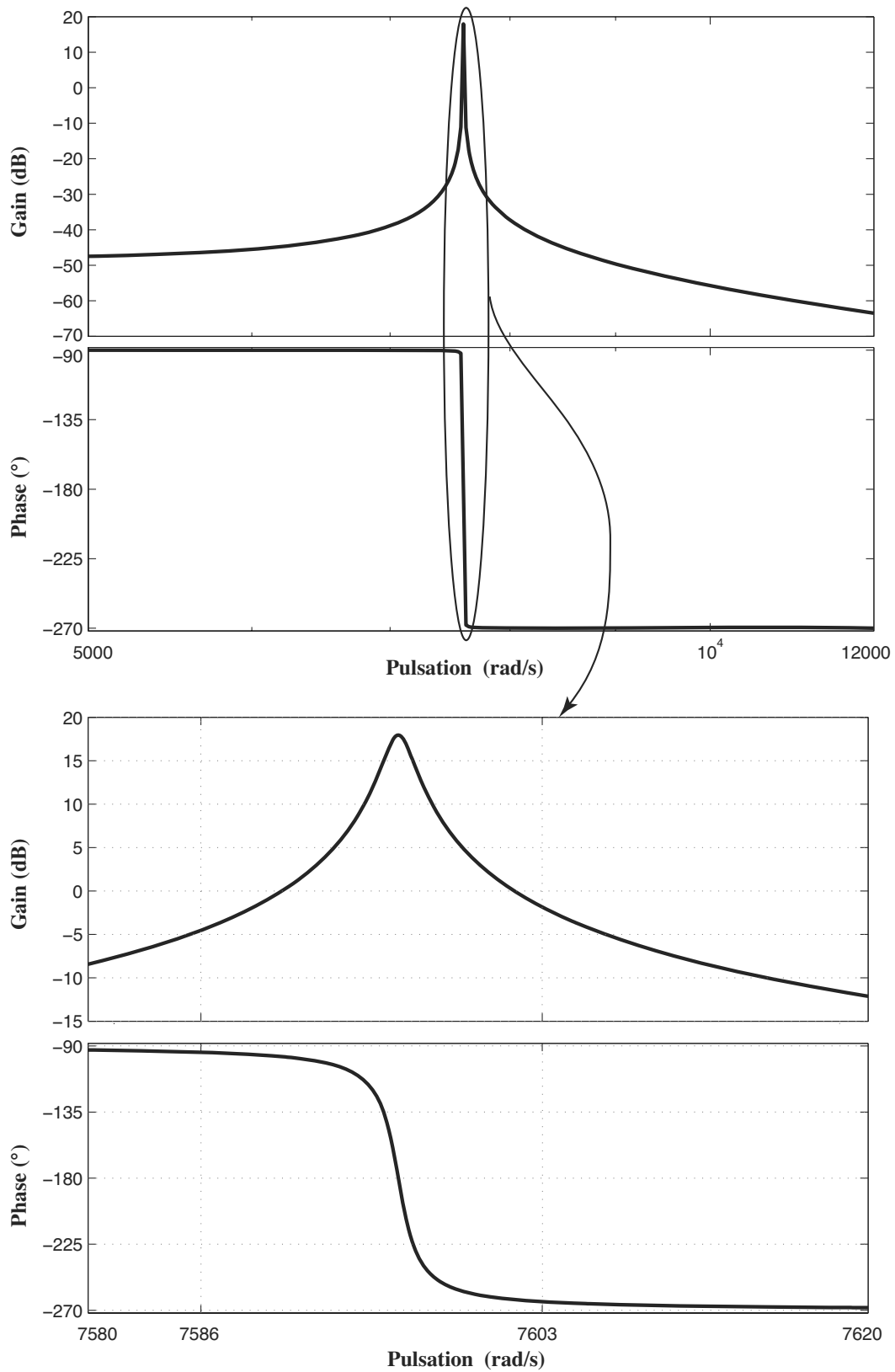
#### Question 33

Discuter de la stabilité du système **en énonçant précisément le théorème** que vous utilisez. Déterminer la valeur limite du coefficient d'amortissement  $\xi_Q$  qui stabilise le comportement du système.

#### Question 34

Préciser dans ce cas les valeurs de la marge de phase et de la marge de gain.

Afin d'assurer la stabilité du système, on prendra pour la suite comme valeur de coefficient d'amortissement :  $\xi_Q = 0,001$ .



**Figure III.5 •** Diagramme de Bode de la fonction  $H_{BO1}$

### III.5 Optimisation du comportement du système

Pour toutes les phases d'accélération et de décélération du véhicule, le régime moteur n'est pas constant. Le système doit donc en permanence ajuster la valeur du déphasage. L'étude de ce type de comportement nécessite l'étude de la réponse en poursuite (réponse à une rampe unitaire) du système asservi.

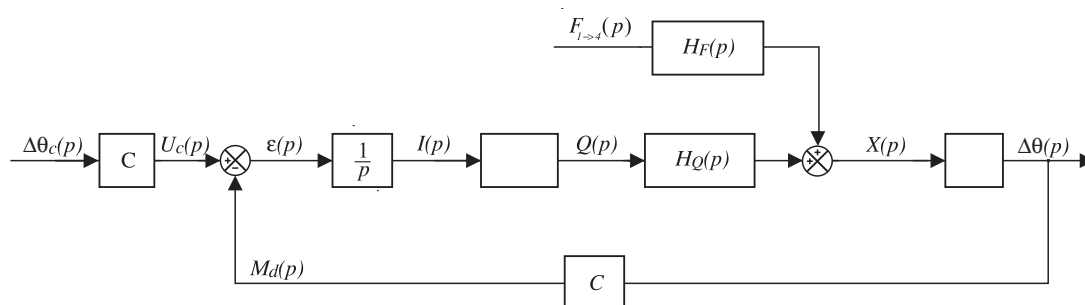
**Question 35**

À partir du modèle précédent, en prenant  $\xi_Q = 0,001$ , préciser le mode dominant de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte  $H_{BO2}(p)$  telle que  $M_d(p) = H_{BO2}(p) U_c(p)$ . En ne considérant que ce mode dominant, déterminer l'écart et le retard de la réponse en poursuite du système. Déterminer la bande passante de cette modélisation.

Pour annuler l'écart en poursuite, on introduit un intégrateur après le comparateur (cf. **Figure III.6**).

**Question 36**

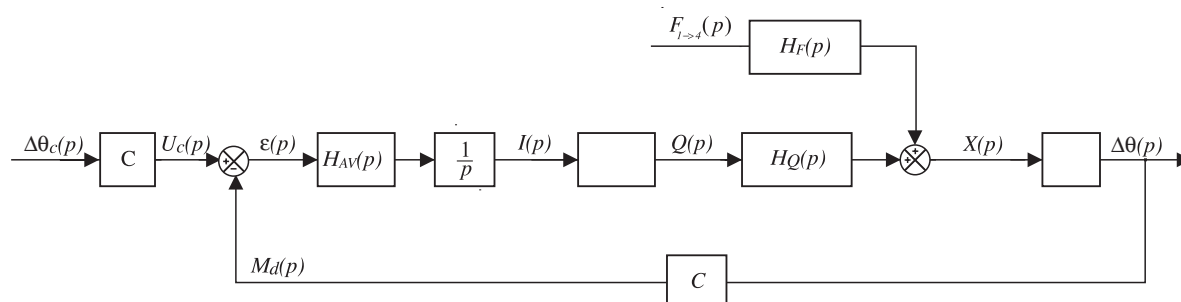
Tracer sur la **Figure 5** du **Cahier Réponses** le diagramme asymptotique de Bode de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte  $H_{BO2}(p)$  telle que  $M_d(p) = H_{BO2}(p) U_c(p)$  du système corrigé par un intégrateur. Discuter la stabilité du système obtenu. En particulier, préciser la valeur de la marge de phase.



**Figure III.6** • Système corrigé par un intégrateur

On souhaite obtenir une marge de phase de  $50^\circ$ . Pour cela, on introduit un correcteur à avance de phase (cf. **Figure III.7**) de fonction de transfert :

$$H_{AV} = K_{AV} \frac{1 + \tau_{AV} p}{1 + a \tau_{AV} p} \quad \text{avec} \quad 0 < a < 1$$



**Figure III.7** • Système corrigé par un intégrateur et un correcteur à avance de phase

**Question 37**

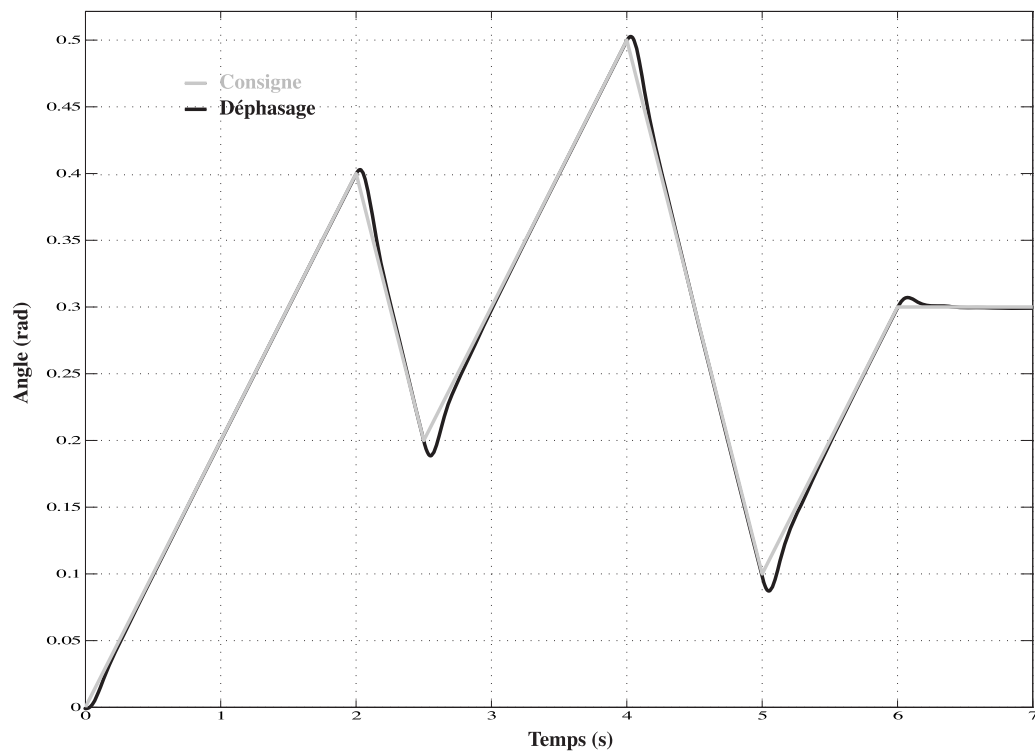
Déterminer graphiquement la valeur du gain du correcteur  $K_{AV}$  qui permet de récupérer la dynamique qu'avait le système avant l'insertion de l'intégrateur (vous pouvez donc utiliser le diagramme de Bode de la **Figure III.4**).

**Question 38**

Déterminer les valeurs numériques de  $a$  puis de  $\tau_{AV}$  qui permettent d'obtenir une marge de phase de  $50^\circ$  tout en conservant au mieux la dynamique du système. On rappelle que l'apport maximum de phase  $\varphi_{\max}$  d'un tel correcteur est donné par la relation :

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{1 - a}{1 + a}$$

Pour information, la **Figure III.8** représente la réponse du modèle final à un signal de consigne linéaire par morceaux.



**Figure III.8 • Réponse du système corrigé**

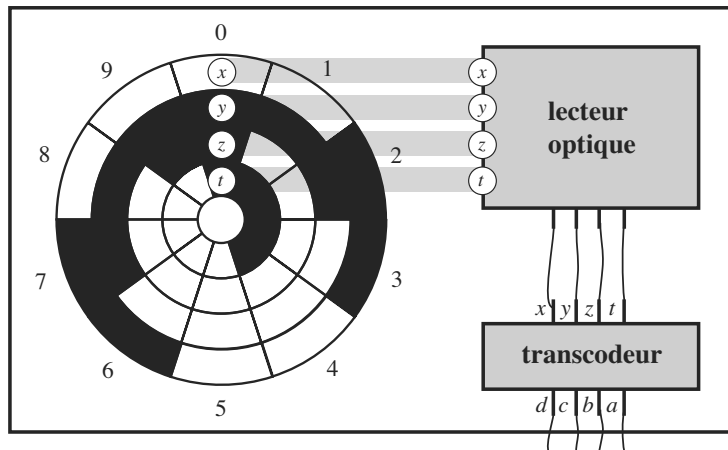
# PARTIE IV Capteurs et transfert d'informations

Pour piloter le déphasage, le calculateur du véhicule utilise les mesures des angles  $\theta_2$  et  $\theta_v$  fournies par deux capteurs angulaires. On s'intéresse à l'un de ceux-ci et, dans une première étude, on se propose d'étudier la technique employée pour **transformer une position angulaire en un code binaire**, délivré sur les bornes de sortie du capteur.

Dans un véhicule, le nombre de capteurs est en constante augmentation : entre la mécanique (moteur, boîte de vitesse), la sécurité active (antiblocage des roues, antidérapage), la sécurité passive (airbags, prétensionneurs de ceintures) et le confort (climatisation, autoradio, navigation, clé d'accès à bord), on peut en compter jusqu'à une soixantaine. Un câblage classique de toutes les bornes de chacun des capteurs conduirait à un faisceau électrique de plusieurs kilomètres, source de pannes multiples, de surplus de masse embarquée et d'encombrement. Depuis 2000, les constructeurs se sont donc tournés vers le **multiplexage**, qui va faire l'objet d'une seconde étude.

## IV.1 Capteur de position angulaire

Pour présenter le fonctionnement, on se place dans le cas d'un capteur permettant de mesurer 10 positions angulaires (notées 0 à 9) représenté sur la **Figure IV.1**. Il est composé d'un **disque**, comportant des informations de position réparties sur 4 pistes, et d'un **lecteur optique** muni que 4 capteurs qui renvoient 4 signaux ( $x, y, z, t$ ) en fonction de la position du disque (*blanc* = 1 et *noir* = 0) et d'un **transcodeur** qui transforme ce code de position ( $x, y, z, t$ ) en code binaire naturel ( $d, c, b, a$ ),  $d$  étant le bit de poids fort.



**Figure IV.1** • Capteur à 10 secteurs angulaires et bornes de sortie ( $d, c, b, a$ )

### Question 39

Sur le **Cahier Réponses**, remplir la table de vérité de la **Figure 6**, qui définit le fonctionnement du transcodeur.

### Question 40

Sur le **Cahier Réponses**, remplir les 4 tableaux de Karnaugh de la **Figure 7**, qui sont associés aux variables binaires  $d, c, b$  et  $a$ .

**Question 41**

En déduire les expressions logiques simplifiées (formes canoniques de type « somme de produits », e.g. :  $k = m\bar{n}op + \bar{m}o\bar{p} + \dots$ ) des variables binaires  $d, c, b$  et  $a$  en fonction des variables d'entrée  $x, y, z$  et  $t$ .

Le codage employé pour le disque est tel qu'une seule case change de couleur entre deux secteurs angulaires consécutifs. Nous allons montrer que ce choix permet d'éviter les erreurs de lecture, même si l'un des 4 capteurs ( $x, y, z, t$ ) souffre d'un défaut d'alignement. Pour cela, nous allons considérer les 4 cas de la **Figure 8** du **Cahier Réponses** : capteurs parfaitement alignés ou présence d'un défaut d'alignement du capteur  $x$ , dans le cas du codage proposé et dans le cas d'un codage différent.

**Question 42**

Sur le **Cahier Réponses**, remplir les 4 chronogrammes de la **Figure 8**, qui représentent les évolutions temporelles des signaux  $x, y, z$  et  $t$ . Pour cela, on suppose que :

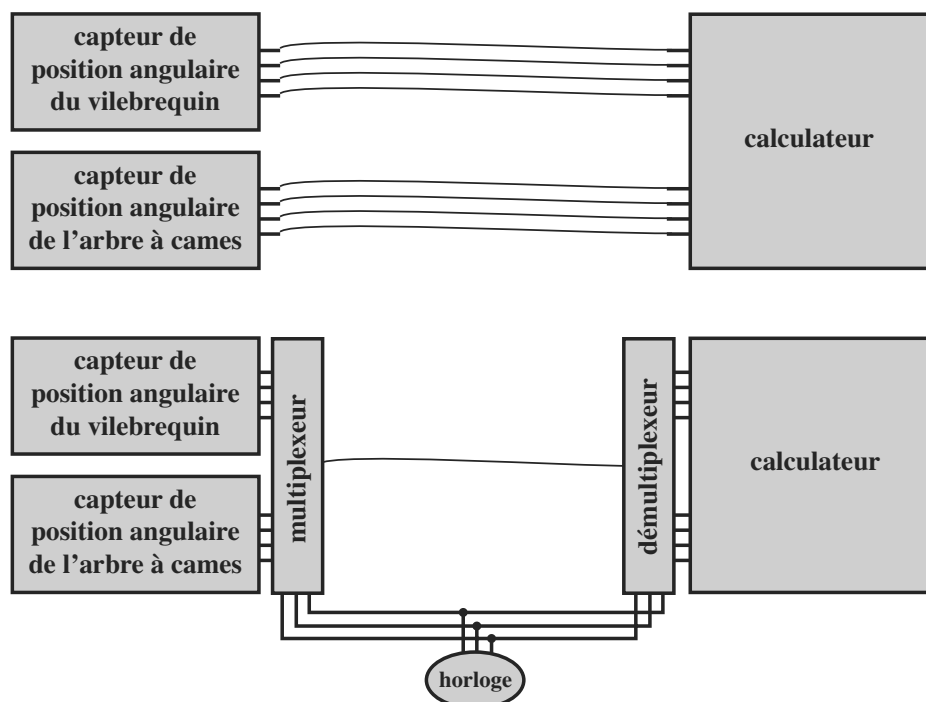
- chaque chronogramme débute dans la position représentée et que le disque tourne dans le sens trigonométrique ;
- l'information envoyée par chaque capteur change d'état au moment où la ligne délimitant deux secteurs consécutifs dépasse le centre du capteur ;
- l'instant  $t_1$  désigne l'instant du premier changement d'état d'un des signaux et l'instant  $t_2$  celui où un deuxième changement se produit.

**Question 43**

À partir de l'observation des chronogrammes précédents, expliquer l'intérêt du codage utilisé dans le capteur.

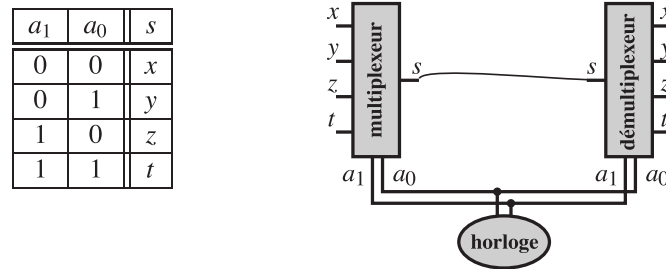
## IV.2 Multiplexage

Le multiplexage est une technique qui consiste à faire passer plusieurs informations à travers un seul support de transmission. En amont, un **multiplexeur** combine les signaux à transmettre sur une seule voie, tandis qu'en aval un **démultiplexeur** se charge de rediviser le signal en autant de signaux indépendants. La **Figure IV.2** illustre l'intérêt d'utiliser le multiplexage pour transférer les informations issues des capteurs de position angulaire du vilebrequin et de l'arbre à cames ( $\theta_v$  et  $\theta_2$ ) au calculateur.



**Figure IV.2 •** Transfert d'informations vers le calculateur sans et avec multiplexage

On se propose d'étudier le fonctionnement du système de multiplexage de la **Figure IV.3**.



**Figure IV.3** • Système de multiplexage et table de vérité du multiplexeur « 4 vers 1 »

### IV.2.1 Étude du multiplexeur

Un multiplexeur est un circuit combinatoire qui transmet sur une sortie une des  $N$  entrées. Pour sélectionner cette entrée, le multiplexeur reçoit une adresse codée sur  $n = \log_2 N$  bits. La table de vérité de la **Figure IV.3** est celle d'un multiplexeur « 4 vers 1 », c'est-à-dire à  $N = 4$  entrées  $(x, y, z, t)$  et une sortie  $s$ , adressée par  $n = 2$  bits de sélection  $(a_1, a_0)$  qui sont indexés sur des signaux d'horloge.

#### Question 44

Écrire les expressions logiques simplifiées (de type « somme de produits », e.g. :  $k = m\bar{n}op + \bar{m}o\bar{p} + \dots$ ) de la variable  $s$  en fonction de  $(x, y, z, t)$  et  $(a_1, a_0)$ .

#### Question 45

Sur le **Cahier Réponses**, réaliser le logigramme de la **Figure 9** correspondant au fonctionnement du multiplexeur.

#### Question 46

Sur le **Cahier Réponses**, réaliser le chronogramme de la **Figure 10** correspondant au fonctionnement du multiplexeur lorsque les bits de sélection  $(a_1, a_0)$  sont indexés sur les signaux d'horloge définis sur la figure.

#### Question 47

Le mot binaire de 2 bits formé par  $a_1a_0$  décrit un cycle de valeurs. Quel est-il ? Expliquer les différences entre les valeurs des fréquences des différents signaux  $(x, y, z, t, a_0, a_1)$ .

#### Question 48

Sur le système réel, on souhaite avoir avec le capteur une précision de mesure de la position angulaire de l'arbre à cames de  $0,3^\circ$ . Déterminer le nombre minimum de pistes nécessaires pour le capteur. En supposant que la vitesse de rotation maximum de l'arbre à cames est de 4000 tr/min, déterminez la fréquence maximale des signaux associés à chaque piste. De combien de bits doit être composé l'adressage du multiplexeur ? Quelle est alors la valeur de la plus haute fréquence de ces signaux d'adressage ? Conclure quant à la faisabilité actuelle d'une telle architecture pour la transmission de donnée dans un véhicule automobile.

## IV.3 Étude du démultiplexeur

Le message  $s$  ayant été transmis, il est nécessaire de reconstruire les signaux  $(x, y, z, t)$  à l'aide d'un démultiplexeur « 1 vers 4 » adressé par les bits de sélection  $(a_1, a_0)$ . On fait l'hypothèse qu'un système « bloqueur » fait en sorte que le signal sur l'une des sorties du démultiplexeur reste à sa valeur tant que cette sortie n'est pas de nouveau adressée.

**Question 49**

Sur le **Cahier Réponses**, réaliser la table de vérité de la **Figure 11** correspondant au fonctionnement du démultiplexeur. Vous noterez *Hi* (Haute impédance) l'état d'une sortie qui n'est pas affecté par l'état de l'entrée  $s$ .

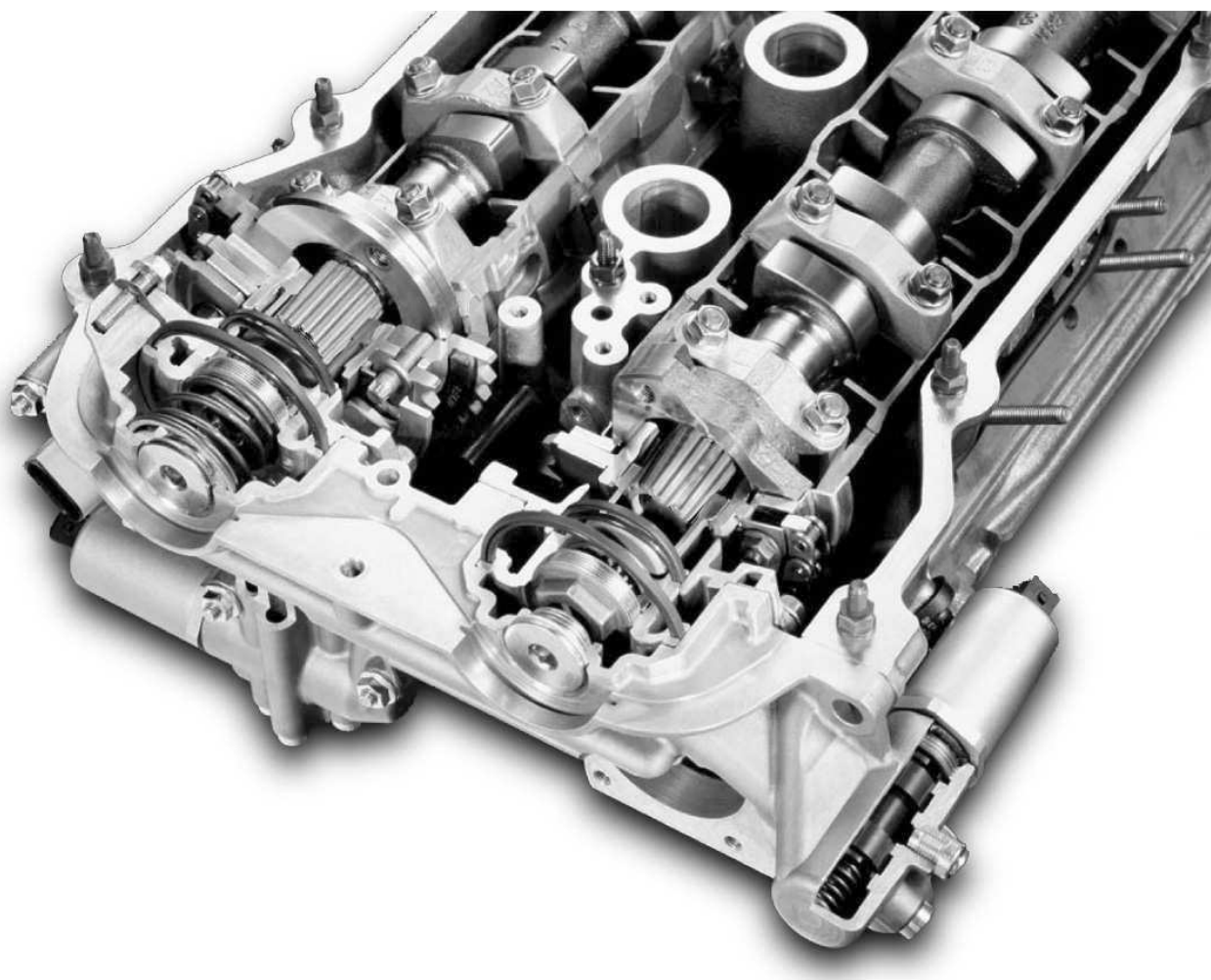
**Question 50**

Écrire les expressions logiques simplifiées (de type « somme de produits ») des variables  $x, y, z$  et  $t$  en fonction de l'entrée  $s$  et des bits d'adressage  $(a_1, a_0)$ .

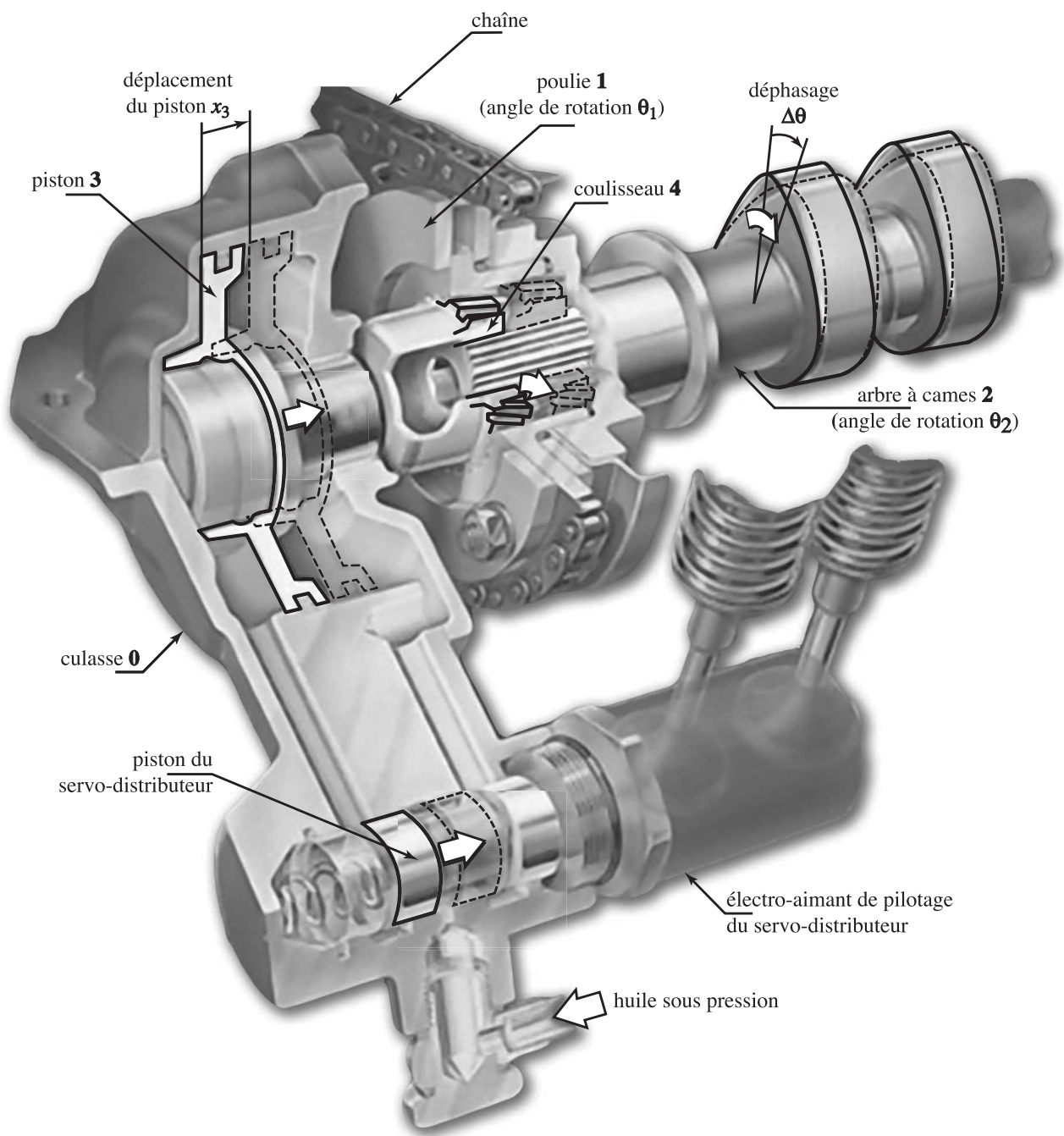
**Question 51**

Transformer les expressions précédentes afin de les exprimer en fonction de l'opérateur NAND à 2 entrées uniquement. Sur le **Cahier Réponses**, et uniquement à l'aide d'opérateurs NAND à 2 entrées, réaliser sur la **Figure 12** le logigramme de la sortie  $x$  du démultiplexeur (les logigrammes des 3 autres sorties ne sont pas demandés).





**Figure A.1** • Système de déphasage implanté sur les arbres à cames d'admission et d'échappement  
(© BMW 2006)



**Figure A.2** • Schéma de principe du système de déphasage d'arbre à cames (d'après système Vanos  
© BMW 2006)