Banque PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes.

Dans tout le problème, n est un entier strictement positif, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, I_E l'identité dans E et 0_E l'endomorphisme nul sur E.

PARTIE A

1. Dans cette question, E est de dimension 2. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E. On considère l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base $\mathcal{B}$:

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que f est un projecteur. Quel est son rang ?

   (b) Déterminer le noyau et l'image de f.

2. Dans cette question, E est de dimension 3. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. D désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\epsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ et P le plan engendré par les vecteurs $\epsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\epsilon_3 = 2e_1 - e_2$.
   Déterminer la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur P parallèlement à D.

3. Dans cette question et jusqu'à la fin de cette partie, p désignera un projecteur de E, où E est un espace vectoriel de dimension n. Montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E ; on pourra écrire, pour $x \in E$, $x = [x - p(x)] + p(x)$.
4. Soit q l'endomorphisme défini par : $q = I_E - p$. Montrer que q est un projecteur de E. Déterminer le noyau et l'image de q. Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.
5. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de E et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.
   (a) Montrer que si $p_1 \circ p_2 = 0_E$ alors q est un projecteur de E.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Ker}(p_2) \subset \mathrm{Ker}(q)$.
   (c) Montrer alors que $\mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Ker}(p_2) = \mathrm{Ker}(q)$.
6. L'espace vectoriel E est désormais muni d'un produit scalaire $< \, , \, >$.
   La norme du vecteur $x \in E$ est notée $||x||$.
   Enfin, le sous-espace orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E, sera noté $F^{\perp}$.
   On rappelle qu'un projecteur de E est dit orthogonal lorsque son noyau et son image sont orthogonaux. Soit p un projecteur de E.
   (a) Montrer que si p est un projecteur orthogonal alors :
   $$\forall u \in E \qquad ||p(u)|| \leq ||u|| \qquad (\star)$$
   (b) Montrer que si la condition $(\star)$ est vérifiée alors p est un projecteur orthogonal.

PARTIE B

Soit f un endomorphisme de E qui commute avec tous les endomorphismes de E, c'est-à-dire :

$$\forall g \in \mathcal{L}(E) \qquad f \circ g = g \circ f.$$

1. Soit $u \in E - \{0\}$. Montrer que la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u)$ possède un supplémentaire dans E que l'on notera H_u. On précisera la dimension de H_u.
2. Montrer qu'il existe un réel λ_u tel que $f(u) = \lambda_u \cdot u$. (On utilisera le fait que le projecteur sur $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à H_u, noté p_u, et f commutent.)
3. Soit $v \in E$, non colinéaire au vecteur u ; on note λ_v le réel tel que $f(v) = \lambda_v \cdot v$. Montrer que $\lambda_u = \lambda_v$.
4. Reprendre la question précédente lorsque v est non nul et colinéaire au vecteur u.
5. En déduire quels sont les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E.

PARTIE C

On considère ici l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des coefficients de la diagonale de A et ${}^tA$ la matrice transposée de A.
On définit l'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(A\, {}^tB).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$.
2. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$, montrer que

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leq n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

3. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$ et $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$. Montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$.
4. On note Φ la norme associée au produit scalaire φ.
Soit U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$, et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$.
Exprimer $\Phi(MU)$ en fonction de $\Phi(M)$.
5. On considère dans cette question **uniquement** que $n = 2$. On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \ ; \ (a, b) \in \mathrm{IR}^2 \right\}.$$

   (a) Donner une base de $F^{\perp}$.

   (b) Déterminer la matrice A', image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, par la projection orthogonale sur F.

PARTIE D

On définit l'application ψ de $\mathrm{IR}_3[X]^2$ dans IR par :

$$\forall (P, Q) \in \mathrm{IR}_3[X]^2 \qquad \psi(P, Q) = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i).$$

1. Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathrm{IR}_3[X]$.
2. Soit $F = \mathrm{IR}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

   (a) Calculer $\psi(1, 1)$, $\psi(1, X)$, $\psi(1, X^2)$, $\psi(X, X)$, $\psi(X, X^2)$ et $\psi(X^2, X^2)$.

   (b) On note $\mathcal{B}' = \{P_0, P_1, P_2\}$ la base orthonormale de F telle que :

$$\forall k \in \{0, 1, 2\} \quad \mathrm{Vect}(P_0, \cdots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, \cdots, X^k) \ \text{ et } \ \psi(P_k, X^k) > 0.$$

   Déterminer explicitement les polynômes P_0, P_1 et P_2.
3. Soit $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2, 3)$.
On considère l'ensemble des sommes

$$\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{3} [x_i - P(i)]^2 \, , \ P \in F \right\}.$$

(a) Montrer qu'il existe un polynôme R, et un seul, de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$\forall i \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\} \qquad R(i) = x_i.$$

(b) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme R sur le sous-espace vectoriel F.

(c) Montrer alors que l'ensemble Σ possède un minimum atteint pour un polynôme $S \in F$ et un seul. Déterminer ce minimum.