Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

A rendre avec la copie une feuille de papier millimétré

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les deux premières parties du problème peuvent être traitées indépendamment du reste.

I. Première partie

1. *a.* Etudier les variations de la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ par : $f(x) = \sin x$.

   b. Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ sur $[-1, 1]$.

   c. *i.* Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$.

   ii. Donner, pour tout réel x de $]-1, 1[$, l'expression de $\left(f^{-1}\right)'(x)$ en fonction de x .

   iii. Montrer que $\left(f^{-1}\right)'$ est de classe C^{∞} sur $]-1, 1[$.

   On posera, pour tout réel x de $[-1, 1]$: $f^{-1}(x) = Arc\sin x$.

   d. Donner, sur un graphe, dans un repère orthonormé direct, l'allure des courbes représentatives de f et f^{-1} .

2. Soit α un réel non nul.
On pose, pour tout réel x de $[-1, 1]$: $g_{\alpha}(x) = \cos\left(\alpha\, Arc\sin x\right)$.

   a. Montrer que g_{α} est de classe C^{2} sur $]-1, 1[$.

b. Donner, pour tout réel x de $]-1\,,\,1[$, l'expression de $g_\alpha'(x)$ en fonction de x.

c. Donner, pour tout réel x de $]-1\,,\,1[$, l'expression de $g_\alpha''(x)$ en fonction de x.

d. Montrer que g_α est solution sur $]-1\,,\,1[$ de l'équation différentielle :

$$\left(1-x^2\right)y'' - x y' + \alpha^2 y = 0 \quad (\mathscr{E})$$

e. On recherche une solution de $(\mathscr{E})$ développable sur $]-1\,,\,1[$ en série entière sous la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et telle que :

$$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0$$

i. Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+2} en fonction de a_n.
ii. Donner, pour tout entier naturel p, la valeur de a_{2p+1} .
iii. Exprimer, pour tout entier naturel p, a_{2p} en fonction de p (on ne cherchera pas à simplifier le numérateur) de a_{2p}.
iv. Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue ?

f. Déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles $(\mathscr{E})$ admet des solutions polynomiales (dans cette question, les valeurs de $y(0)$ et $y'(0)$ ne sont pas fixées).

3. Dans cette question uniquement, on se place dans le cas où $\alpha = 1$.

Pour tout réel x de $[-1\,,\,1]$, donner une expression simplifiée de $g_\alpha(x)$.

4. Dans cette question uniquement, on se place dans le cas où $\alpha = 2$.

a. Donner, pour tout réel x de $[-1\,,\,1]$, une expression simplifiée de $g_\alpha(x)$ en fonction de x.

b. Donner le développement en série entière de g_α.

5. Pour tout entier naturel non nul k, et tout réel x de $[-1\,,\,1]$, on pose : $P_k(x) = \cos\left(2^k \operatorname{Arc}\sin x\right)$

a. Montrer que, pour tout réel x de $[-1\,,\,1]$, P_k est une fonction polynomiale de x , dont on précisera le degré. On désignera par c_k le coefficient du terme de plus haut degré de $P_k(x)$.

b. c_{k-1} étant le coefficient du terme de plus haut degré de $P_{k-1}(x)$, donner une relation entre c_{k-1} et c_k.

c. Pour tout entier naturel non nul m, et tout réel x de $[-\pi, \pi]$, on introduit la grandeur T_m, dont on admettra l'existence, par la propriété :

$$\cos(mx) = T_m(\cos(x))$$

i. Pour tout réel x de $[-\pi, \pi]$, exprimer $T_0(\cos(x))$ et $T_1(\cos(x))$ en fonction de $\cos(x)$.

ii. Démontrer que, pour tout réel x de $[-\pi, \pi]$:

$$T_{m+2}(\cos(x)) + T_m(\cos(x)) = 2\cos(x)\,T_{m+1}(\cos(x))$$

iii. Déduire des résultats précédents que, pour tout réel x de $[-\pi, \pi]$, $T_m(\cos(x))$ est un polynôme en $\cos(x)$, dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

iv. En remarquant que, pour tout réel x de $[-1, 1]$:

$$\cos\left(2^k \,Arc\sin x\right) = \cos\left(2^{k-1}\, 2\,Arc\sin x\right)$$

exprimer alors c_k en fonction de k.

II. Deuxième partie

Dans cette partie, on considère la fonction $\tilde{g}$, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, et telle que, pour tout réel x de $[-1, 1]$:

$$\tilde{g}(x) = \cos(2\,Arc\sin\ x).$$

1. *a.* Donner, pour tout réel x de $[-1, 1]$, une expression plus simple de $\tilde{g}(x)$.
   b. $\tilde{g}$ est-elle continue ?

2. Donner, pour tout entier naturel n, l'expression des coefficients de Fourier trigonométriques de $\tilde{g}$.

3. Pour tout réel x de $[-1, 1]$, justifier la convergence des sommes partielles de la série de Fourier de $\tilde{g}$ en x.

4. Donner la valeur des sommes suivantes :

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

ii. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

III. Troisième partie

Soit β un réel strictement positif. On pose : $I_\beta = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^\beta \cos^2 x}$.

1. Montrer que, pour $\beta \leq 1$, l'intégrale I_β diverge.

2. On se place désormais dans le cas où $\beta > 1$.
Pour tout entier naturel naturel k , on pose :

$$I_{k,\beta} = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^\beta \cos^2 x}$$

a. Comparer la convergence de la série $\left(\sum_{k \geq 0} I_{k,\beta} \right)$ et de l'intégrale I_β .

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1 + (k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2 x} \leq I_{k,\beta} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1 + k^\beta \pi^\beta \cos^2 x}$$

c. Soit C un réel non nul. On pose :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + C^2 \cos^2 x}$$

A l'aide du changement de variable

$$t = \tan x$$

calculer J.

d. Pour quelles valeurs de β l'intégrale I_β est-elle convergente ?

En Mécanique, on a souvent besoin, pour résoudre simplement et formellement des problèmes, d'approximer les quantités considérées (déplacement, ...) . Pour cela, on utilise le panel des outils proposés à cet effet par l'analyse mathématique : séries, séries entières, séries de Fourier, ...

FIN DE L'EPREUVE.