Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les parties A et B sont très largement indépendantes. La partie C l'est totalement.

On désigne par n un entier naturel strictement supérieur à 1 et H l'un des ensembles de nombres $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{M}_n(H)$ **l'anneau** des matrices carrées de dimension n, à coefficients dans H et on désigne par I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(H)$.

PARTIE A

1. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur son déterminant, une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ? Exprimer alors $\det(A^{-1})$ en fonction de $\det(A)$.
2. Déterminer les inverses des matrices suivantes :
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})\,;\ (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.
Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} et que A^{-1} est, elle aussi, un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si, et seulement si, $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
Donner alors l'expression de A^{-1} en fonction de a, b, c, d.

On notera désormais $\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, constitué des matrices M telles que $\det(M) = 1$.

4. Déterminer les couples $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$.

PARTIE B

On désignera par $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles qu'il existe un entier naturel p, non nul, vérifiant $A^p = I_2$.
Pour chaque matrice A de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, on admet qu'il existe un plus petit entier naturel q non nul tel que $A^q = I_2$, on le note $h(A)$; il est appelé ordre de la matrice A.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(A) = p$.

1. Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
   En déduire les valeurs possibles de $\det(A)$.
2. Vérifier que $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$. Comparer $h(A)$ et $h(A^{-1})$.
3. On notera λ_1 et λ_2 les valeurs propres complexes, éventuellement confondues, de A.
   Montrer que λ_1 et λ_2 sont de module 1.
4. Exprimer en fonction de λ_1 et λ_2 la trace, $\mathrm{Tr}(A)$, de la matrice A.
5. En déduire que $\mathrm{Tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
6. Montrer que les matrices $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et déterminer leurs ordres. La matrice produit CD appartient-elle à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$?

   On note $\chi_A(X) = \det(XI_2 - A)$ le polynôme caractéristique de la matrice A.

7. Exprimer $\chi_A(X)$ en fonction de $\det(A)$ et de $\mathrm{Tr}(A)$.
8. Vérifier alors qu'il y a 10 polynômes caractéristiques possibles ; déterminer dans chacun des cas les valeurs propres de A. En utilisant alors B.3, vous excluerez 4 de ces cas.
9. Dans les six cas restants, montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et déterminer l'ordre de A.
10. En déduire l'existence et la valeur du plus petit entier naturel non nul p_2 tel que :

$$\forall A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z}) \qquad A^{p_2} = I_2.$$

PARTIE C

Dans cette partie, les candidats veilleront à respecter scrupuleusement l'ordre des questions.

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application φ définie par :

$$\forall (P,\, Q) \in E \times E \qquad \varphi(P,\, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(\pi_0,\, \pi_1,\, \pi_2,\, \pi_3)$ de E et une seule telle que :

$$\forall\, i \in \{0,1,2,3\} \qquad \mathrm{Vect}(\pi_0, \cdots, \pi_i) = \mathrm{Vect}(1,\, X, \cdots, X^i) \;\text{ et }\; \varphi(\pi_i,\, X^i) > 0$$

   puis déterminer les quatres polynômes $\pi_0,\, \pi_1,\, \pi_2,\, \pi_3$.

3. Soit $P \in E$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^{1} [P(t)]^2\, dt = 1$.

   (a) Montrer qu'il existe $(\alpha_0,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} \alpha_i \pi_i$.

   (b) Sans déterminer les réels α_i, déterminer $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \alpha_i^2$.

   (c) *i.* Soient (a,b,c,d) et (a',b',c',d') deux quadruplets de réels. Montrer que :

$$|aa' + bb' + cc' + dd'| \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2+d'^2}.$$

   ii. En déduire que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad |P(x)| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{3}[\pi_i(x)]^2}.$$

   (d) En étudiant, pour tout k de $\{0,1,2,3\}$, $\mathrm{Sup}\{\pi_k(x),\; -1 \leq x \leq 1\}$, montrer :

$$\mathrm{Sup}\{|P(x)|,\; |x| \leq 1\} \leq 2\sqrt{2}.$$

FIN DE L'EPREUVE