Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Partie I

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On note Γ la surface d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{3}(z-2)^2.$$

1. Déterminer la nature de la surface Γ. On précisera les éléments caractéristiques de cette surface.
2. Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à Γ au point de coordonnées $(1, \sqrt{2}, 5)$.
3. Déterminer l'équation cartésienne de la courbe obtenue par l'intersection d'un plan parallèle au plan Oxy avec la surface Γ.
   Quelle est la nature de cette courbe ?

4. (a) Déterminer la nature de l'intersection de la surface Γ avec le plan d'équation $x = 0$.
   (b) Déterminer la nature de l'intersection de la surface Γ avec le plan d'équation $x = k$, où k est un réel non nul fixé.
   (c) Déterminer la nature de l'intersection de la surface Γ avec un plan parallèle à l'axe Oz.
5. Déterminer la nature de l'intersection de la surface Γ avec un plan contenant le point de coordonnées $(0, 0, 2)$.

Partie II

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équations

$$\begin{cases} x = 1 \\ y^2 - z^2 = 4 \end{cases}.$$

1. Quelle est la nature de $\mathcal{H}$?
2. Montrer que la surface $\mathcal{S}$, engendrée par les droites D, assujetties à rencontrer l'axe $(O\,;\ \vec{k})$ et la courbe $\mathcal{H}$, tout en restant parallèles au plan $(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j})$, a pour équation

$$y^2 = x^2(z^2 + \beta^2),$$

   où β est un réel que l'on déterminera.

   Les candidats qui n'ont pas trouvé la valeur de β sont invités à composer en gardant β comme paramètre.

3. Donner une équation de la section de $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $x = b$, où b désigne un réel.
   En déduire la nature de cette section ainsi que le lieu de ses sommets et de ses foyers.
   On étudiera à part le cas particulier du plan d'équation $x = 0$.
4. Donner une équation de la section $\mathcal{S}_0$ de $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $y = c$, où c désigne un réel.
5. On paramètre $\mathcal{S}_0$ par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{c}{2} \times \cos t \\ y(t) = c \\ z(t) = 2 \tan t \end{cases} \qquad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[.$$

   On définit la courbure en un point de $\mathcal{S}_0$ de paramètre t par :

$$\Delta(t) = x'(t)z''(t) - x''(t)z'(t).$$

   Les points d'inflexion de $\mathcal{S}_0$ sont les points de paramètre t en lesquels la courbure s'annule en changeant de signe.
   Déterminer la courbure au point de paramètre t.
   En déduire le lieu des points d'inflexion de $\mathcal{S}_0$. On étudiera à part le cas particulier du plan d'équation $y = 0$.

Partie III

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{e_1},\,\overrightarrow{e_2})$. On donne les points $F(1,\,0)$ et $A(1,\,-2)$. Soit $\mathcal{P}$ la parabole passant par A, de foyer F et de sommet O. Tout point de $\mathcal{P}$ est repéré par son ordonnée $2t$, où t désigne un réel variable.

1. Former une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2. Soit M le point de $\mathcal{P}$, d'ordonnée $2t$, former une équation de la tangente en M à $\mathcal{P}$. Donner une équation de la perpendiculaire à cette tangente, menée par A. Déterminer les coordonnées du point d'intersection N de ces deux droites.
3. Etudier et tracer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points N, lorsque M décrit $\mathcal{P}$, c'est-à-dire lorsque t décrit $\mathbb{R}$. On dressera le tableau des variations des coordonnées de N, on précisera les branches infinies ainsi que le vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{E}$ au point A.
4. On considère trois points de $\mathcal{E}$ correspondant aux valeurs t_1, t_2 et t_3 du paramètre réel t. Montrer que ces trois points sont alignés si, et seulement si

$$t_1t_2t_3 - (t_1 + t_2 + t_3) = \alpha,$$

   où α est un réel dont on donnera la valeur.
5. Soit N_0 le point de $\mathcal{E}$ correspondant à la valeur t_0 de t ; la tangente à $\mathcal{E}$ en N_0 recoupe $\mathcal{E}$ au point K, correspondant à la valeur θ de t. Exprimer θ en fonction de t_0.
6. Le point K est appelé tangentiel du point N_0. Montrer que si trois points de $\mathcal{E}$ sont alignés, alors leurs tangentiels sont alignés.
7. Quel est le tangentiel du point correspondant à $t = 1$?
8. Un point peut-il être confondu avec son tangentiel ?

FIN DE L'EPREUVE