BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème d'algèbre linéaire

Dans tout le problème, l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F pour ce produit scalaire.

Si E est un espace vectoriel de dimension n, on appelle hyperplan un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Partie I

Soit A la matrice définie par

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A est orthogonale.
2. (a) Justifier que A est diagonalisable. Que dire de plus de ses espaces propres ?
   (b) Rappeler quelles sont les valeurs propres réelles possibles d'une matrice orthogonale.
   (c) A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
3. Caractériser l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

Partie II

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit u un endomorphisme de E tel que $u \circ u = Id$. Nous notons $E_u^+ = Ker(u - Id)$ et $E_u^- = Ker(u + Id)$.

1. Montrer que u est inversible et préciser son inverse.
2. Pour tout $x \in E$, on pose

$$x_+ = \frac{x + u(x)}{2} \qquad \text{et} \qquad x_- = \frac{x - u(x)}{2}.$$

   Montrer que $x_+ \in E_u^+$ et $x_- \in E_u^-$.
3. En déduire que $E = E_u^+ \oplus E_u^-$.
4. Montrer que u est diagonalisable.
5. Montrer que u est une isométrie si et seulement si $E_u^+ \perp E_u^-$.

Partie III

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y - z + t = 0,\ 2x - z - t = 0\}.$$

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Vérifier que $\tilde{u}_1 = (1,1,1,1) \in F$.
Déterminer une base orthonormale (u_1, u_2) de F où u_1 est un vecteur colinéaire à $\tilde{u}_1$.

3. Vérifier que $\tilde{u}_3 = (1,-1,-1,1) \in F^\perp$.
Compléter la base précédente en une base orthonormale (u_1, u_2, u_3, u_4) de $\mathbb{R}^4$ en choisissant u_3 colinéaire à $\tilde{u}_3$.

4. On note s la symétrie orthogonale par rapport à F. Ecrire la matrice de s dans la base canonique.

5. On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.
Ecrire la symétrie s comme composée de deux réflexions (on pourra se placer dans une base adaptée à s).

Partie IV

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Soit f une isométrie de E. On note F_f l'ensemble des points fixes de f soit $F_f = \{x \in E,\ f(x) = x\}$ et

$$p_f = n - dim\, F_f.$$

On veut montrer par récurrence sur p_f que l'on peut trouver ℓ réflexions $r_1, r_2, \dots, r_\ell$ avec $\ell \le p_f$ telles que

$$f = r_1 \circ r_2 \cdots \circ r_\ell.$$

1. Montrer que le résultat est vrai pour $p_f = 1$.

2. Soit k un entier fixé tel que $2 \le k \le n$ et supposons le résultat vrai si $p_f < k$. Soit g une isométrie telle que $p_g = k$.

   (a) Montrer que $F_g^\perp \neq \{0\}$.

   (b) Soit $x_0 \in F_g^\perp$, $x_0 \neq 0$ et $y_0 = g(x_0)$. Montrer que $y_0 \neq x_0$ et $y_0 \in F_g^\perp$.

   (c) Soit r la réflexion par rapport à $Vect(x_0 - y_0)^\perp$.
   Montrer que $F_g \subset Vect(x_0 - y_0)^\perp$. En déduire que $F_g \subset F_r$ puis que $F_g \subset F_{r \circ g}$

   (d) Montrer que $(x_0 - y_0) \perp (x_0 + y_0)$.
   Calculer $r(x_0 - y_0)$ et $r(x_0 + y_0)$. En déduire que $r(y_0) = x_0$.

   (e) Montrer que $p_{r \circ g} < p_g$.

   (f) En appliquant l'hypothèse de récurrence à $r \circ g$, montrer que g peut s'écrire comme composition de ℓ réflexions avec $\ell \le k$.

Probabilités

Un joueur joue au casino avec une fortune initiale de $a \in \mathbb{N}$ euros. A chaque partie, il a une probabilité $p \in]0,1[$ de gagner 1 euro et une probabilité $q = 1 - p$ de perdre 1 euro. Les parties sont supposées indépendantes entre elles.

Plus formellement, nous notons R_n le résultat de la n-ième partie et nous supposons que les variables aléatoires $(R_n)_{n \ge 1}$ sont indépendantes entre-elles et de même loi donnée par

$$\forall n \ge 1, \quad \mathbb{P}(R_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(R_n = -1) = p.$$

On note X_n la fortune du joueur après la n-ième partie. La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ est donc définie par récurrence par

$$\begin{cases} X_0 = a, \\ \forall n \geq 0, \quad X_{n+1} = X_n + R_{n+1}. \end{cases}$$

On suppose que le joueur peut s'endetter et qu'il continue donc de jouer même si $X_n < 0$.

1. Calculer les lois de X_1 et de X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe une unique application $\phi_n : \{-1,1\}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ telle que
$$(X_1, \ldots, X_n) = \phi_n(R_1, \ldots, R_n).$$
Montrer que cette application ϕ_n est injective.

3. On note, pour tout entier $k \geq 1$, N_k le nombre de parties nécessaires pour que le joueur atteigne la somme de $a+k$, soit
$$N_k = \min\{n \geq 0,\ X_n = a+k\}$$
avec la convention $N_k = +\infty$ si la somme $a+k$ n'est jamais atteinte.

   Ainsi, sur l'exemple suivant :

Numéro de la partie	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Résultat		-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1
Fortune	a	a-1	a	a+1	a+2	a+1	a+2	a+3	a+4	a+3

   on a $N_1 = 3$, $N_2 = 4$, $N_3 = 7$.

   On note $p_n = \mathbb{P}(N_1 = n)$.

   (a) Que valent p_0 et p_1 ?

   (b) Justifier que, pour tout $k \geq 1$, il existe un sous-ensemble A_k de $\{-1,1\}^k$ tel que nous ayons égalité des événements
   $$\{N_1 = k\} = \{(R_1, \ldots, R_k) \in A_k\}.$$

   (c) Justifier que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 1$,
   $$\mathbb{P}((R_{n+1}, \ldots, R_{n+k}) \in A_k) = p_k.$$

   (d) Justifier, pour $1 \leq k < n$, l'égalité des événements
   $$\{N_1 = k, N_2 = n\} = \{(R_1, \ldots, R_k) \in A_k,\ (R_{k+1}, \ldots, R_n) \in A_{n-k})\}.$$

   (e) Soit $n_2 \in \mathbb{N}$.

      i. Déduire de la question précédente que, pour tout $n_1 < n_2$,
      $$\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = p_{n_1} p_{n_2 - n_1}.$$

      ii. Donner la valeur de $\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2)$ si $n_1 \geq n_2$ ainsi que la valeur de $\mathbb{P}(N_1 = +\infty, N_2 = n_2)$.

4. Montrer que, pour tout $n > 1$, on a

$$p_n = q\mathbb{P}(N_2 = n-1)$$

(on pourra étudier ce qui se passe à la première partie), puis, en appliquant la formule des probabilités totales, que

$$p_n = q(p_1 p_{n-2} + p_2 p_{n-3} + \cdots p_{n-2} p_1).$$

5. On note G la fonction définie pour tout $s \in [0,1]$ par

$$G(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n s^n.$$

Déduire de la formule précédente que, pour tout $s \in [0,1]$,

$$G(s) - ps = qsG(s)^2.$$

6. Calculer $G(0)$ puis en déduire une expression de $G(s)$ pour tout $s \in [0,1]$.

7. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ (On pourra remarquer que $1 - 4pq = (1-2p)^2$). De quel événement cette quantité est-elle la probabilité ?

Fin de l'épreuve

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1096 – D'après documents fournis