Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille dont l'entête n'a pas été intégralement renseignée, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

Tournez la page S.V.P.

Préambule

1. Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

$$y' + 2\,x\,y = 0$$

Dans ce qui suit, on désignera par f la solution de $(\mathcal{E})$ prenant la valeur 1 en zéro. Il est demandé de donner explicitement f.

2. Déterminer la dérivée seconde f'' et la dérivée troisième f''' de f.
3. Déterminer, après avoir justifié leur existence :

$$\max_{t\,\in\,[0,1]} |f(t)| \quad , \quad \max_{t\,\in\,\mathbb{R}} |f'(t)| \quad \text{et} \quad \max_{t\,\in\,[0,1]} |f'(t)|$$

4. (a) Enoncer le théorème des accroissements finis.
   (b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un réel η strictement positif, que l'on explicitera, tel que :

$$\forall\,(x,y)\ \in\ [0,1]^2\ :\quad |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n, la dérivée $n^{ième}$ de f s'exprime à l'aide de f et d'une fonction polynomiale H_n, dont on précisera la parité, et le degré. On désignera par $a\,(H_n)$ le coefficient dominant de H_n.
6. Donner, pour tout entier naturel n, une relation entre $a\,(H_n)$ et $a\,(H_{n+1})$, puis exprimer $a\,(H_n)$ en fonction de l'entier n.

Partie I

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n\,e^{-x^2}\,dx \quad , \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\,e^{-x^2}\,dx$$

On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,\cdot$$

1. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que si la fonction g est paire, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, I_n et J_n sont des intégrales convergentes.
3. Donner, pour tout entier naturel pair n, une relation entre I_n et J_n. Que vaut J_n si l'entier n est impair ?
4. Calculer I_1.

5. Déterminer, pour tout entier naturel n, une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
6. Soit k un entier naturel. Montrer que :

$$I_{2\,k} = \frac{(2\,k)\,!}{2^{2\,k}\,k\,!}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et exprimer, en fonction de k : $I_{2\,k+1}$.

7. (a) Montrer que toute fonction polynomiale P, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,e^{-x^2}\,dx$ converge.

(b) Soit Q une fonction polynomiale telle que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} Q^2(x)\,e^{-x^2}\,dx = 0$.

Montrer que la fonction Q est identiquement nulle.

(c) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \langle P,Q\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,e^{-x^2}\,dx \end{array}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(d) Justifier : $\langle H_0, H_1\rangle = 0$.

On rappelle que la suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été introduite dans le Préambule.
On admettra, pour la suite du problème que :

$$\forall\,(p,q)\,\in\,\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,:\quad \langle H_{2\,p}, H_{2\,q+1}\rangle = 0$$

(e) Construire une base orthonormée du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par H_0, H_1 et H_2.

Partie II

Pour tout réel x, on pose :

$$F(x) = x\int_1^2 e^{-x^2\,t^2}\,dt$$

1. Etudier la parité de F.
2. Montrer que, pour tout réel x :

$$F(x) = \int_x^{2\,x} e^{-u^2}\,du$$

3. Etudier la continuité et la dérivabilité de F (on pourra utiliser le résultat du Préliminaire donnant $\max\limits_{t\,\in\,\mathbb{R}} |f'(t)|$).
4. Que vaut :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)\,?$$

Tournez la page S.V.P.

5. Etudier la convergence de la série de terme général $F(2^n)$.
6. (a) Donner l'expression de la dérivée de F.
   (b) Résoudre : $F'(x) = 0$.
   (c) Etudier les variations de la fonction F. Il est demandé de donner le tableau de variations de la fonction F.
7. Montrer que, pour tout réel strictement positif x :

$$x\, e^{-4\,x^2} \leq F(x) \leq x\, e^{-x^2}$$

8. Tracer l'allure du graphe de la fonction F.
9. (a) Justifier le fait que la fonction F admette des primitives sur $\mathbb{R}$. On désignera par G la primitive de F s'annulant en 0.
   (b) On introduit :

$$\ell_G = \lim_{x \to +\infty} G(x)$$

   Justifier l'existence de ℓ_G dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
   (c) Montrer que : $\dfrac{1}{8} \leq \ell_G \leq \dfrac{1}{2}$.
10. (a) Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle.
    (b) Donner le développement en série entière de la fonction F, en précisant son rayon de convergence.

Partie III

<u>Dans ce qui suit, f est la fonction introduite dans le Préambule.</u>

Pour tout entier naturel non nul n, tout entier naturel $k \leq n$, et tout réel x, on pose :

$$R_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \quad , \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\, R_{n,k}(x)$$

1. Soit x un réel, et n un entier naturel. Donner, le plus simplement possible, la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, R_{n,k}(x)$.
2. Soit p un réel tel que : $0 < p < 1$. On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S_n ? On donnera la valeur de son espérance $\mathbb{E}\,[S_n]$.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(p)$$

(b) Soit ε un réel strictement positif. Enoncer la loi faible des grands nombres, et en déduire que pour tout $\eta > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \eta\right] \leq \varepsilon$$

(c) Soit $\eta > 0$. Que peut-on dire de l'ensemble :

$$\left\{k \in \mathbb{N}\,,\, \left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \eta\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{N}\,,\, \left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta\right\} \quad ?$$

(d) En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$|f(p) - B_n(f)(p)| \leq 3\,\varepsilon$$

où on rappelle que la fonction f a été introduite dans le Préambule. Que peut-on en déduire ?

On s'est intéressé, dans ce problème, à l'étude de quelques propriétés de la fonction gaussienne $f : t \mapsto e^{-t^2}$, qui apparaît notamment dans l'expression de la densité de probabilité de la loi normale, à laquelle tendent à obéir de nombreux phénomènes concrets : résistance à l'usure et à la pression par exemple.

Après un Préambule qui fait apparaître les polynômes d'Hermite lors du calcul de dérivées $n^{\text{ièmes}}$, la première partie permet, dans un premier temps, de calculer les moments d'ordre $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, on aborde d'autres propriétés, calculs d'intégrales diverses, puisque la fonction gaussienne peut aussi être utilisée pour définir un produit scalaire sur des espaces de polynômes. Dans la seconde partie, interviennent une fonction et des séries construites à partir de f. Enfin, dans la troisième partie, on montre, à l'aide d'un résultat du cours de probabilités, la loi faible des grands nombres, que la fonction gaussienne peut s'obtenir comme limite d'une suite de fonctions polynomiales (faisant intervenir une autre famille de polynômes remarquables : les polynômes de Bernstein), résultat important dès que l'on veut faire du calcul numérique. Cela permet de faire le lien avec la première partie, l'aspect « produit scalaire » intervenant pour déterminer la précision et la fiabilité d'une approximation : à quelle distance de la solution exacte est la solution approchée ? On notera que le cas étudié dans ce problème est un cas particulier du théorème d'approximation de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment peut être approchée par une suite de fonctions polynomiales.

Fin de l'épreuve

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1052 – D'après documents fournis