BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

# Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.**

---

## L'usage de calculatrices est interdit.

### À rendre avec la copie 1 feuille de papier millimétré.

**AVERTISSEMENT**

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

**Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.**

**Le sujet est composé, hors questions de cours, de 3 parties indépendantes.**

## Quelques questions de cours.

1. Soit $n$ un entier naturel non nul. Donner la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matricées carrées à $n$ lignes et $n$ colonnes.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. A quelle condition la série géométrique $\sum z^n$ converge-t-elle ? Préciser alors la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.
3. Soit $A$ une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in ]0\,;\,1[$.
   (a) Donner l'univers image $A(\Omega)$, et pour tout $k \in A(\Omega)$, la valeur des probabilités $P(A = k)$.
   (b) Donner l'espérance et la variance de $A$.
4. Donner la forme générale des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A quelles isométries sont-elles associées ? Les éléments caractéristiques ne sont pas demandés.

## Première Partie.

Soit $M$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note ${}^tM$ sa transposée, $\mathrm{tr}(M)$ sa trace et $\det(M)$ son déterminant.
Un sous-espace vectoriel $F$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dit stable par produit si pour toutes matrices $M$ et $N$ de $F$, le produit $MN$ appartient à $F$.
Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels. On note $M(a, b, c)$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ et $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M(a, b, c)$.
$E$ désigne l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes $f_{a,b,c}$ lorsque $(a, b, c)$ parcourt $\mathbb{R}^3$.
Enfin on note $I = M(1, 0, 0)$, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1. (a) Démontrer que $E$ est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.
   (b) Donner une base d'un supplémentaire de $E$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On considère la fonction $\varphi$ définie sur $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ par :
$$\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2,\ \varphi(M, N) = \mathrm{tr}({}^tMN)$$
   (a) Démontrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Vérifier que les matrices $I$ et $J + K$ sont deux vecteurs orthogonaux pour le produit scalaire $\varphi$.
   (c) Déterminer le projeté orthogonal de la matrice $K$ sur le sous-espace vectoriel $G$ engendré par les matrices $I$ et $J + K$. En déduire la distance $K$ à $G$.
   (d) En effectuant un minimum de calculs supplémentaires, donner une base orthonormée de $E$.
   (e) Déterminer le supplémentaire orthogonal de $E$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Dans cette question, on pose $\alpha = \sqrt{|bc|}$ et on suppose que $(b, c) \neq (0, 0)$.
   (a) Déterminer les valeurs propres réelles ou complexes de la matrice $M(a, b, c)$. On les exprimera en fonction de $a$ et $\alpha$ et on discutera suivant le signe de $bc$.

(b) On suppose que $\alpha \neq 0$. La matrice $M(a, b, c)$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ? Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ?

(c) On suppose que $\alpha = 0$. La matrice $M(a, b, c)$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ? Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ?

4. (a) Quelles sont les isométries positives (ou directes) appartenant à $\mathcal{E}$ ?

   (b) Quelles sont les isométries négatives (ou indirectes) appartenant à $\mathcal{E}$ ? On donnera leurs éléments caractéristiques.

5. Soit $p$ un projecteur appartenant à $\mathcal{E}$ distinct de l'identité et de l'application nulle. Il existe donc deux droites vectorielles distinctes $D_1$ et $D_2$ telles que $p$ soit le projecteur sur $D_1$ parallèlement à $D_2$.

   (a) Ecrire la matrice de $p$ dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$. En déduire les valeurs propres, la trace et le déterminant de $p$.

   (b) En déduire quelles sont les matrices $M(a, b, c)$ pour lesquelles $f_{a,b,c}$ est un projecteur (distinct de l'identité et de l'application nulle).

   (c) Préciser quels sont les projecteurs orthogonaux de $\mathcal{E}$ et en donner les éléments caractéristiques. On pourra utiliser la question 4.

6. Le produit de deux matrices de $E$ est-il toujours une matrice de $E$ ?

7. L'objectif de cette question est de déterminer les droites vectorielles $\Delta$ de $E$ qui sont stables par produit.
   Soit $\Delta$ une droite vectorielle engendrée par $M_0 = M(a_0, b_0, c_0)$.

   (a) Démontrer que $\Delta$ est stable par produit si et seulement si $M_0^2 \in \Delta$.

   (b) On suppose que $M_0^2 \in \Delta$.

      i. Justifier qu'il existe un réel $\lambda$ tel que $M_0^2 = \lambda M_0$.

      ii. Démontrer que si $\lambda = 0$, alors $M_0$ est proportionnelle à $J$ ou $K$.

      iii. On suppose que $\lambda \neq 0$. On pose $M_0' = \dfrac{1}{\lambda} M_0$. Démontrer que $M_0'$ est la matrice canoniquement associée à un projecteur.

   (c) Conclure

8. L'objectif de cette question est de déterminer les plans vectoriels de $E$ stables par produit.

   (a) Vérifier que le plan vectoriel engendré par $I$ et $J$ est stable par produit.

   (b) Le plan vectoriel engendré par $J$ et $K$ est-il stable par produit ?

   (c) Vérifier que l'ensemble des matrices symétriques de $E$ est un plan vectoriel stable par produit.

   (d) Soit $(b, c) \neq (0, 0)$. Démontrer que le sous-espace vectoriel engendré par $I$ et $bJ + cK$ est stable par produit.

   (e) Démontrer que les seuls plans vectoriels de $E$ stables par produit sont ceux de la question précédente.

# Deuxième Partie.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire et de son repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ usuels.
Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $(a,\,b) \neq (0,\,0)$.
On considère alors la conique $C_{a,b}$ d'équation : $a\,x^2 + 2b\,xy + a\,y^2 - 4\,(x+y) = 4$.

1. Dans cette question uniquement $a = 5$ et $b = -3$.
   (a) Etudier la conique $C_{5,-3}$.
   On donnera en particulier :
   - une équation réduite en précisant le repère dans lequel elle est obtenue,
   - sa nature,
   - les coordonnées dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$ de son centre,
   - les coordonnées dans le repère de votre choix (à préciser) de ses sommets.

   (b) Tracer la conique $C_{5,-3}$ dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.
   On utilisera la feuille de papier millimétré fournie et on prendra une unité de 4cm.
2. Déterminer en fonction de $a$ et $b$ le type de conique qu'est $C_{a,b}$.

On considère désormais la conique $C_{A,B}$ d'équation : $A\,x^2 + 2B\,xy + A\,y^2 - 4\,(x+y) = 4$ où $A$ et $B$ sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètres respectifs $p_A \in ]0\,;1[$ et $p_B \in ]0\,;1[$.
On définit la variable aléatoire $X$ par $X(\Omega) = \{-1,,\,0,\,1\}$ et :
- $X = 1$ si $C_{A,B}$ est du type ellipse,
- $X = 0$ si $C_{A,B}$ est du type parabole,
- $X = -1$ si $C_{A,B}$ est du type hyperbole.

3. Détermination de la loi de $X$.
   (a) Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p_A)^{k-1}(1-p_B)^{k-1}$.
   (b) Justifier que $P(A+B=0) = 0$.
   (c) Justifier que $P(X=0) = P(A=B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(A=k)P(B=k)$.
   (d) En déduire que $P(X=0) = \dfrac{p_A\,p_B}{p_A - p_A\,p_B + p_B}$.
   (e) Justifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, $P(B>k) = (1-p_B)^k$.
   (f) En déduire que $P(B>A) = \dfrac{p_A\,(1-p_B)}{p_A - p_A\,p_B + p_B}$.
   (g) En déduire $P(X=-1)$ puis $P(X=1)$.
   (h) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire $X$.

## Troisième Partie.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire et de son repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$ usuels.
On considère alors la courbe $\Gamma$ d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + 4\,y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

On note $S$ la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe $\Gamma$ autour de l'axe des ordonnées $(Oy)$.

1. (a) Démontrer qu'une équation cartésienne de $S$ est : $x^2 + 4\,y^2 + z^2 = 4$.
   (b) Démontrer que tous les points de $S$ sont réguliers.
   (c) Déterminer une équation du plan tangent à $S$ au point $A$ de coordonnées $(\sqrt{2},\,0,\,-\sqrt{2})$.
2. On note $\vec{u}$ le vecteur $\vec{i}+\vec{k}$. On considère $\Lambda_1$ l'ensemble des points $M$ de $S$ tels que la normale au plan tangent à $S$ en $M$ est orthogonale à $\vec{u}$.
   (a) Démontrer que des équations cartésiennes de $\Lambda_1$ sont : $\begin{cases} x^2 + 4\,y^2 + z^2 = 4 \\ x + z = 0 \end{cases}$.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de la surface réglée $\Sigma_1$ engendrée par les droites passant par un point de $\Lambda_1$ et dirigées par $\vec{u}$.
   (c) Soit $D_1$ une génératrice de $\Sigma_1$. Démontrer que le plan tangent à $\Sigma_1$ est le même en tout point régulier de $D_1$.
3. On note $\Omega$ le point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(0,\,0,\,4)$. On considère $\Lambda_2$ l'ensemble des points $M$ de $S$ tels que la normale au plan tangent à $S$ en $M$ soit orthogonale à la droite $(\Omega M)$.
   (a) Démontrer que des équations cartésiennes de $\Lambda_2$ sont : $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 3 \\ z = 1 \end{cases}$.
   (b) On note $\Sigma_2$ la surface réglée engendrée par les droites $(\Omega M)$ où $M$ parcourt $\Lambda_2$. Soit $N$ un point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(x,\,y,\,z)$.
   Démontrer que $N \in \Sigma_2$ si et seulement si $N = \Omega$ ou $\dfrac{3x^2}{(4-z)^2} + \dfrac{12y^2}{(4-z)^2} = 1$.
   (c) En déduire qu'une équation cartésienne de $\Sigma_2$ est : $3x^2 + 12y^2 = (4-z)^2$.
   (d) Déterminer les points non réguliers de $\Sigma_2$.
   (e) Soit $D_2$ une génératrice de $\Sigma_2$. Démontrer que le plan tangent à $\Sigma_2$ est le même en tout point régulier de $D_2$.

Fin de l'épreuve



IMPRIMERIE NATIONALE – 22 1078 – D'après documents fournis