Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

À rendre avec la copie 2 feuilles de papier millimétré.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Le sujet est composé de 4 parties. La partie 4 est indépendante du reste du sujet.

Tournez la page S.V.P.

Première Partie.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \; R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice R est une rotation dont on déterminera les éléments caractéristiques.
2. Calculer $A_1 = RDR^{-1}$ et l'exprimer à l'aide de la matrice A. Les calculs devront figurer sur la copie.
3. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A et f_1 celui associé à la matrice A_1.
   (a) Démontrer que f_1 est la composée <u>commutative</u> d'une symétrie s_1 et d'une projection p_1 dont on exprimera les matrices S_1 et P_1 dans la base canonique en fonction de R et de deux autres matrices diagonales à préciser.
   (b) La symétrie s_1 est-elle unique ?
   (c) La symétrie s_1 proposée à la question (a) est-elle orthogonale ?
4. (a) Justifier à l'aide des résultats précédents que la matrice A est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres.
   (b) Justifier que f est la composée de trois transformations simples que l'on précisera.
5. (a) Démontrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice B. Préciser la valeur propre associée.
   (b) Justifier que la matrice Q est inversible.
   (c) Sans calculer Q^{-1}, ni le polynôme caractéristique de la matrice B, démontrer que $B = QDQ^{-1}$.
6. Démontrer que les matrices A_1 et B sont semblables. On mettra en évidence la relation entre ces deux matrices.

Deuxième Partie.

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on considère la fonction vectorielle $f_{a,b,c}$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; f_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} b\,\mathrm{e}^t + c\,\mathrm{e}^{-t} \\ 2a - b\,\mathrm{e}^t \\ a + c\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

On note F l'ensemble des fonctions $f_{a,b,c}$ lorsque (a, b, c) parcourt $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}_{a,b,c}$ la courbe paramétrée sur $\mathbb{R}$ par $f_{a,b,c}$.
Enfin, les matrices B et Q sont celles qui ont été définies dans la première partie.

1. Démontrer que F est un espace vectoriel dont on précisera une base et la dimension.
2. Démontrer que tout élément f de F vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = B\,f(t)$$

   où f' désigne la dérivée de la fonction f.
3. Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_{a,b,c}$ sont planes et qu'il est possible de choisir des plans qui les contiennent qui soient tous parallèles.
4. On considère la base $(\vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de passage de la base $(\vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k})$ à la base $(\vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$ est la matrice Q.
   (a) Exprimer chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.
   (b) Justifier qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{C}_{a,b,c}$ dans le repère $(O\,;\ \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$ est
   $$\begin{cases} X(t) = a \\ Y(t) = b\,\mathrm{e}^{t} \\ Z(t) = c\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$
   (c) En déduire que chaque courbe $\mathcal{C}_{a,b,c}$ est incluse dans une hyperbole éventuellement dégénérée.

Troisième Partie.

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k})$.
Dans cette partie, on note $\mathcal{C}$ la courbe $\mathcal{C}_{1,1,1}$ définie dans la partie précédente.
Une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est donc : $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = 2 - \mathrm{e}^{t} \\ z(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t} \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$

On note $M(t)$ le point de $\mathcal{C}$ de paramètre t.

1. Déterminer une représentation paramétrique et des équations cartésiennes de la tangente à $\mathcal{C}$ au point $M(\ln(2))$.
2. Soit T un réel strictement positif. On note $L(T)$ la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ entre les points $M(0)$ et $M(T)$.
   (a) Etablir que pour tout $t \geqslant 0$, $2(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t})^2 \leqslant \left\| \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \right\|^2 \leqslant 2\mathrm{e}^{2t}$.
   (b) En déduire un encadrement de $L(T)$ puis un équivalent de $L(T)$ lorsque T tend vers $+\infty$.
3. Soient Σ la surface d'équation $x^2-(y-2)^2-(z-1)^2 = 2$ et Ω le point de coordonnées $(0,\, 2,\, 1)$.
   Pour tout réel α, on note Π_α le plan d'équation $x = \alpha$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{C} \subset \Sigma$.
   (b) Déterminer une équation du plan tangent en $M(\ln(2))$ à Σ.
   (c) Déterminer la nature de la courbe $\Lambda_\alpha = \Sigma \cap \Pi_\alpha$ lorsque $|\alpha| \geqslant \sqrt{2}$. On précisera ses élément caractéristiques.
   Qu'en est-il lorsque $|\alpha| < \sqrt{2}$?

(d) Justifier soigneusement que Σ est une surface de révolution dont on précisera l'axe Δ.

(e) Rappeler la définition d'une méridienne pour une surface de révolution.

(f) Préciser la nature des méridiennes de Σ.

(g) Sur la première feuille de papier millimétré fournie, tracer l'allure de Σ dans le repère $(\Omega\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$.
Il est conseillé d'orienter $\vec{i}$ vers le haut.

(h) La surface de révolution obtenue en faisant tourner $\mathcal{C}$ autour de Δ est-elle égale à Σ ?

Quatrième Partie.

Le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.
On considère la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = 2 - \mathrm{e}^t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

On note $A(t)$ le point de Γ de paramètre t.

1. Etablir les tableaux de variations des fonctions x et y. On précisera les limites aux bornes.
2. Déterminer la tangente à Γ au point $A(0)$.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses et préciser un vecteur directeur et une équation cartésienne de la tangente à Γ en ce point.
4. Etudier la branche infinie au voisinage de $-\infty$.
5. Justifier qu'au voisinage de $+\infty$, Γ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x + 2$.
   Préciser la position relative de Γ et $\mathcal{D}$.
6. Dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$, tracer la courbe Γ, les tangentes et asymptotes déterminées dans les questions précédentes.
   Unité : 3cm.
   On utilisera pour cela la deuxième feuille de papier millimétré fournie.
7. On note $B(t)$ le point de $\mathcal{D}$ ayant la même abscisse que $A(t)$ où $A(t)$ est le point de Γ de paramètre t.
   (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer la longueur $d(t) = A(t)B(t)$.
   (b) Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} d(n)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} d(\ln(n))$ sont-elles convergentes ?
   Si oui, préciser leur somme.
   (c) On note S la partie du plan incluse entre la restriction de la courbe Γ à $\mathbb{R}^+$, la droite $\mathcal{D}$ et la droite d'équation $x = 2$.
   La partie S est-elle d'aire finie ?

Fin d'épreuve