Rapport sur l'oral de Mathématiques I

Remarques générales

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *interrogateur* désignera une interrogatrice ou un interrogateur.

L'oral, qui dure 30 minutes est séparé en deux parties : 25 minutes sont consacrées à la résolution d'un exercice sans préparation, et le temps restant est consacré à une question de cours, sur un sujet différent de celui de l'exercice.

L'exercice proposé au candidat porte sur l'ensemble du programme des deux années de préparation (algèbre, analyse, probabilités et géométrie), et est de difficulté graduelle, les premières questions étant toujours très abordables. Les exercices sont répartis de façon équilibrée entre algèbre, analyse, probabilités, géométrie. Lorsqu'un deuxième exercice est proposé, il porte sur une autre partie du programme.

Les exercices font l'objet d'une concertation entre les membres du jury, qui veillent à ce que leurs difficultés soient comparables. Ces exercices présentent en général au moins trois ou quatre questions, la première, voire les deux premières, étant systématiquement faciles, leur solution n'excédant pas deux ou trois lignes. Donnons quelques exemples :

- ⇝ Tracer rapidement la courbe d'équation $y = x^3 - x$.

- ⇝ Déterminer selon la valeur du réel a le rang de la matrice :
$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ⇝ Montrer que si la fonction réelle $x \longmapsto x^2 f^2(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, il en est de même de la fonction $x \longmapsto f^2(x)$.

- $\rightsquigarrow$ Déterminer une représentation paramétrique de la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- $\rightsquigarrow$ Si X suit une loi géométrique de paramètre p et si $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\mathbb{P}([X \geq n])$$

Les exercices sont conçus ainsi pour mettre en confiance le candidat.

Les questions suivantes peuvent présenter des difficultés plus grandes, et en ce cas, l'interrogateur guide le candidat en posant des questions annexes. *Il est alors extrêmement important pour le candidat de bien écouter ce que dit l'interrogateur.* En effet, les questions sont faites pour mettre le candidat sur la piste de la solution et accessoirement lui donner l'occasion de mettre en valeur ce qu'il sait.

Pendant l'interrogation, le candidat ne doit pas hésiter à indiquer à l'examinateur ce qu'il pense, à se poser des questions à haute voie. Même si ce qu'il envisage n'est pas forcément ce qui convient, cela permet à l'examinateur d'engager le dialogue (c'est un *oral* !). Le fait de savoir critiquer ce qui a été écrit est aussi une bonne chose. Là encore, donnons des exemples, tous tirés de phrases prononcées par des candidat :

- $\rightsquigarrow$ ≪ Je pourrais utiliser le théorème de Rolle ≫.
- $\rightsquigarrow$ ≪ Je vais regarder ce que donne la formule pour $n = 2$ et $n = 3$ ≫.
- $\rightsquigarrow$ ≪ Je vais regarder si l'équation n'admet pas une solution évidente ≫.
- $\rightsquigarrow$ ≪ Si la matrice est symétrique… ≫
- $\rightsquigarrow$ ≪ Je ne suis pas certain que $\mathbb{P}(B) > 0$, donc je ne peux pas écrire $\mathbb{P}_B(A)$ ≫.

Cette aisance face à l'exercice est indispensable pour réussir l'épreuve. Une bonne façon d'y parvenir, et peut-être même la seule, est de *bien connaître le cours*. Cela veut dire pouvoir énoncer sans hésiter les définitions et les théorèmes du programme, et avoir une idée (cela suffit souvent) de la preuve des résultats. Pour ce faire, le candidat doit se procurer les programmes (ils sont disponibles sur Internet), et, notamment au moment de ses révisions, vérifier point par point qu'il en maîtrise les contenus. C'est certainement plus utile que de faire quantité d'exercices et de ne pas savoir *énoncer* correctement un théorème. Par exemple, le jury a constaté que certains candidats ignoraient ce que veut dire ≪ la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ ≫, alors qu'ils étaient parfaitement capables de montrer l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \exp(-x^2)$ en écrivant $f(x) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et en appliquant un critère de majoration.

Un défaut souvent constaté est le suivant : le candidat réduit l'énoncé d'un théorème à l'énoncé d'une formule. Donnons un exemple d'une telle situation, hélas fréquemment rencontrée : la question de cours est « Formule des probabilités totales ». La réponse obtenue est

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=?}^{?} \mathbb{P}(B \cap A_k) \quad \text{ou bien} \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{k=?}^{?} \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k)$$

ce qui peut être rendu correct... Dans les formules ci-dessus, les bornes varient en général d'un candidat à l'autre. D'où les points d'interrogation. Voyons maintenant ce qu'on attend (pas forcément dans cet ordre) :

- $\rightsquigarrow$ D'abord dire que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.
- $\rightsquigarrow$ Ensuite, dire que B et les A_k sont des événements, et indexer correctement la famille des A_k, ainsi que la somme qui apparaît dans la formule.
- $\rightsquigarrow$ Dire que la famille des A_k constitue un système complet d'événements.
- $\rightsquigarrow$ Enfin, si on choisit de donner le second énoncé, préciser que $\mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout k.

Et là, il faut savoir ce qu'est un système complet d'événements. Sans la connaissance de cette *définition*, l'énoncé du *théorème* n'a pas de sens. Dans le même ordre d'idées, l'énoncé du théorème de transfert a présenté pour la plupart des candidats des difficultés énormes, alors que son usage dans le cours d'un exercice n'en a pas posé, pourvu que l'interrogateur s'abstienne d'en demander l'énoncé.

Un autre exemple. La question est « Formule de Taylor avec reste intégral ». Il convient tout d'abord d'en donner une formulation exacte, et pour cela de l'avoir mémorisée en choisissant les noms des points (a et x, ou bien a et b). Les candidats pensent souvent en avoir fini une fois la formule écrite, alors qu'il faut en donner les hypothèses, parmi lesquelles *ne figure pas* $a < x$, ou $a < b$. Cela fait, si l'interrogateur demande la preuve de la formule, il suffit de savoir qu'on fait une intégration par parties.

Il convient aussi que le candidat soit familier des termes utilisés par le programme. Par exemple, le *Lemme d'Abel* y figure. La question « Énoncé du lemme d'Abel » pourra être posée. Si le mot est ignoré, on demandera alors ce qu'on peut dire d'une série entière telle que la suite $(a_n z_0^n)_{n\geq 0}$ soit bornée, mais c'est déjà une part de la réponse. De même le *Théorème de relèvement* et le *Théorème de comparaison série-intégrale* figurent dans le programme. On pourra donc dans chaque cas en demander l'énoncé sans plus de détail. Par contre, le *Théorème spectral* n'est pas mentionné par le programme, et donc aucune question n'est posée qui utilise cette expression, ce qui déroute parfois les candidats.

Le jury souhaite aussi insister sur les points suivants :

Les candidats sont dans l'ensemble bien préparés à l'exercice de l'oral. Cependant nous remarquons comme chaque année les mêmes défauts :

- ⇝ Un oral n'est pas une colle : ne pas attendre approbation de l'examinateur avant de se lancer dans un calcul.

- ⇝ <u>Gestion du tableau :</u> les candidats ne doivent pas prendre la liberté d'effacer le tableau sans demander au préalable l'autorisation à l'examinateur, cela peut mener à des situations où des calculs importants disparaissent. Un rappel de cette règle est souvent nécessaire.

- ⇝ Les examinateurs sont bienveillants : lorsqu'une indication est donnée au candidat, c'est une bonne idée de la suivre. De trop nombreux candidats continuent sur leur idée initiale, qui n'aboutit pas.

- ⇝ Un candidat doit parler lors d'un oral : expliquer ses idées et les pistes qu'il souhaite suivre. Certains candidats ne parlent pas ou parlent au tableau. Dans le même ordre d'idées, si on peut parfaitement comprendre que les candidats soient intimidés, il est important qu'ils parlent distinctement (suffisamment fort et en articulant). Le jury est parfois contraint de faire répéter certaines explications inaudibles de candidats.

- ⇝ Par ailleurs, nous remarquons des attitudes parfois déplacées : défiance envers l'examinateur, agacement lorsqu'on ne comprend pas une indication, discussions vaines sur les hypothèses. Certains candidats ne laissent même pas l'examinateur finir de parler en coupant la parole pour faire précipitamment un calcul.

- ⇝ Certains candidats semblent s'inquiéter de ne pas parvenir à terminer l'exercice proposé. Ne pas avoir traité beaucoup de questions ne signifie pas nécessairement que la note sera basse. Cela dépend de beaucoup de facteurs, dont la discussion entre le candidat et l'examinateur, le recul du candidat sur les notions abordées, la capacité de proposer des pistes de résolution, etc.

- ⇝ On note cette année certains problèmes dans les calculs : de nombreux candidats commencent un calcul (juste) mais ne vont pas jusqu'au bout et partent sur une autre idée. Les examinateurs doivent leur demander de finir les calculs.

Remarques particulières

Certains candidats abusent du raisonnement par l'absurde. Pour montrer l'unicité d'un élément possédant une propriété, on peut supposer l'existence de deux éléments et montrer qu'ils sont égaux.

En ce qui concerne les définitions générales, les notions d'applications injectives et surjectives ne sont pas toujours connues en dehors du cadre des espaces vectoriels.

Enfin, de trop nombreux candidats semblent considérer que connaître une méthode systématique permettra à coup sûr de répondre à une question.

Quelques exemples :

- Montrer systématiquement qu'une série converge grâce à un critère de d'Alembert (alors qu'on demande de calculer sa somme, et qu'il s'agit d'une série exponentielle).

- Vouloir utiliser la comparaison entre multiplicité des valeurs propres et dimension de l'espace propre concerné, alors que le polynôme caractéristique n'est pas du tout calculé.

1 Analyse

- Certaines inégalités classiques comme

$$|a\,b| \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad , \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

  ne sont pas sues et difficiles à retrouver. En particulier, la manipulation des valeurs absolues semble poser problème à une majorité de candidats.

- La notion de surjectivité est souvent mal énoncée : ce n'est pas l'application qui admet un antécédent.

- La formule de Leibniz est souvent mal énoncée : $(f+g)^{(n)}$ ou $(f \circ g)^{(n)}$. Penser à regarder le cas $n = 1$ ...

- Les exercices faisant intervenir les fonctions de deux variables sont souvent mal traités. La dérivée de $t \mapsto f(u_1(t), u_2(t))$ se retrouve parfois notée $\dfrac{\partial f}{\partial t}$.
  Le développement limité à l'ordre 2 d'une fonction régulière de deux variables est

rarement bien écrit, et lorsque c'est le cas, peu de candidats sont en mesure de donner la signification du terme de reste.

- $\leadsto$ Calculs de sommes : très peu de candidats mènent à bien un calcul avec une somme double.
  Les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n$ sont régulièrement confondues avec la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

- $\leadsto$ Peu de candidats précisent l'hypothèse de continuité pour justifier que $\displaystyle\int_I f(t)dt = 0$ implique $f = 0$ sur I si f est positive.

- $\leadsto$ Intégrales impropres : voici quelques réactions souvent observées à l ?oral lors de l'étude d'une intégrale de la forme $\displaystyle\int_a^b f$:

  - $\leadsto$ Beaucoup de candidats pensent que si f est continue sur $]a, b[$, alors l ?intégrale converge.
  - $\leadsto$ Etude du comportement local de f autour de a et b, sans s ?occuper de ce qu'il se passe sur tout compact de $]a, b[$.

  - $\leadsto$ Confusion fréquente entre les hypothèses « f est positive », « f est monotone », « f est continue », etc..., lorsqu'il s'agit de prouver la continuité, la dérivabilité sous le signe somme, voire simplement la convergence de l'intégrale.

  - $\leadsto$ Les candidats précisent toujours lors d'un changement de variables dans une intégrale que le changement est « strictement monotone », alors que cette condition n'est pas nécessaire.

  - $\leadsto$ Le théorème fondamental de l'analyse n'est pas maîtrisé par certains candidats.

  - $\leadsto$ Lors de l'utilisation des théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$, certains candidats mettent bien trop longtemps à trouver une domination raisonnable. En particulier, lorsque l'intégrale est sur un segment et n'est pas généralisée, il ne faudrait pas que majorer par une constante prenne quinze minutes.

  - $\leadsto$ La règle de la chaîne pour le calcul des dérivées composées est parfois totalement inconnue.

  - $\leadsto$ Les développements limités sont parfois mal utilisés, et les opérations autorisées sur les équivalents ne sont pas toujours connues.

2 Algèbre

- $\rightsquigarrow$ La quasi-totalité des candidats se lance dans de longs calculs pour déterminer valeurs propres et sous-espaces propres d'une matrice. Trop peu sont ceux qui voient spontanément que si A n'est pas inversible, alors 0 est valeur propre, ou que si la matrice a ses deux premières colonnes égales, alors $e_1 - e_2 \in \ker A$.

- $\rightsquigarrow$ Rappelons que la règle de Sarrus n'est qu'une recette pour calculer un déterminant de taille 3×3. Les candidats l'utilisant peuvent se voir demander un calcul plus détaillé, qui est souvent mal maîtrisé.

- $\rightsquigarrow$ Les définitions de base et de dimension sont souvent plus ou moins connues, mais beaucoup de candidats s'effondrent lorsqu'il s'agit de déterminer une base ou de calculer une dimension. La méthodologie ne semble pas toujours bien maîtrisée.

- $\rightsquigarrow$ Lorsque F et G sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel$E$, les candidats confondent souvent $F \cup G$ et $F + G$. Pour beaucoup de candidats, $F \cup G$ est toujours un espace vectoriel. La définition de $F + G$ n'est pas connue. La somme directe de plus de deux espaces vectoriels n'est pas non plus maîtrisée.

3 Probabilités

- $\rightsquigarrow$ Certains candidats font l'impasse sur ce chapitre pourtant conséquent dans le programme. Ainsi, il n'est pas rare de voir des $P(X)$ ou des $X \cap Y$ lorsque X et Y sont des variables aléatoires. Certains candidats ne connaissent pas la définition d'une variable aléatoire, d'autres ne connaissent pas la notion d'incompatibilité entre deux événements.

- $\rightsquigarrow$ On note une manque de maîtrise dans les calculs faisant intervenir des probabilités de la forme $P(f(X) \geq f(a))$.

- $\rightsquigarrow$ L'inégalité de Markov, quand elle est correctement énoncée, l'est souvent sans les bonnes hypothèses.

4 Nombres complexes et géométrie

- $\rightsquigarrow$ L'étude des courbes en coordonnées polaires ou paramétrées réserve souvent de mauvaises surprises.
  Il n'est pas rare que le candidat interrogé ne parvienne péniblement, en 30 minutes, qu'à réduire l'intervalle d'étude et éventuellement réaliser une étude locale autour d'un point singulier. Cela met souvent en évidence un manque de pratique sur des notions d'analyse et de géométrie élémentaire. Par exemple, les manipulations de développements limités usuels et les opérations associées (troncature, etc.) prennent souvent beaucoup de temps. Peu de candidats savent réduire un

intervalle d'étude au maximum et encore moins obtenir correctement les transformations géométriques à opérer pour déduire de l'étude de la courbe sur un intervalle réduit, la courbe complète. A cela, s'ajoute parfois un manque de dextérité dans l'utilisation des formules de trigonométrie.

Il faut d'ailleurs rappeler que ces notions commencent à être abordées dès la classe de Mathématiques Supérieures et ne présentent pas de difficulté conceptuelle particulière.

- $\rightsquigarrow$ Comme chaque année, nous constatons un manque de maîtrise dans la manipulation des nombres complexes. Peu de candidats savent utiliser que si z est de module 1 alors $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. Il n'est pas rare de voir écrit « $\sqrt{z}$ »...

- $\rightsquigarrow$ Certains candidats sont totalement pris au dépourvu face à des exercices de géométrie élémentaire. Il est parfois nécessaire de rendre les questions plus abstraites, en les transposant dans le cadre des espaces euclidiens, pour rassurer les candidats.