Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

L'épreuve était composée d'un problème d'algèbre linéaire (découpé en quatre parties) qui étudiait diverses propriétés des matrices antisymétriques, et d'un exercice de probabilités sur un couple de variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques (décalées).

Problème d'algèbre linéaire

Partie I

Cette première partie consistait à diagonaliser (dans $\mathbb{C}$) une matrice 3×3, puis à montrer qu'elle était semblable à une autre matrice.

Déterminer les valeurs propres d'une petite matrice ne pose aucun problème aux candidats, le critère de diagonalisabilité d'une matrice est en général connu même si la notion de polynôme scindé n'est pas totalement maîtrisée (beaucoup de candidats confondent polynôme scindé et polynôme à racines simples). En revanche, la dernière question a été très peu traitée. La majorité des candidats énoncent que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique (ou des variantes avec le déterminant ou la trace) et utilisent cette implication dans l'autre sens !! Cette erreur (grave) de raisonnement est apparue également plus tard, nous y reviendrons.

Partie III

Cette deuxième partie étudiait une matrice de rotation R, en utilisant le fait que $R - R^{-1}$ est une matrice antisymétrique.

Cette partie était censée être relativement facile et rapporter des points aux candidats, ce qui a été loin d'être le cas avec beaucoup d'erreurs très inquiétantes.

Pour commencer, beaucoup de candidats ne parviennent pas à vérifier correctement que l'ensemble des matrices antisymétriques forme un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices carrées, la plupart affirmant que si deux matrices A et B sont antisymétriques, alors $A + \lambda B$ l'est encore, sans aucune justification. Ils semblent répéter un schéma de preuve souvent vu durant l'année sans vraiment comprendre ce qu'il faut faire.

Il fallait dans une deuxième question déterminer la forme générale d'une matrice antisymétrique (en dimension 3) ; le problème d'implication utilisée dans le mauvais sens est revenu, une très grande majorité de candidats se contentant de vérifier que la matrice donnée était symétrique.

Il était alors facile de déduire de la question précédente une famille génératrice de l'ensemble des matrices antisymétriques (même si, pour beaucoup, une base ne peut être constituée que de vecteurs colonnes), mais très peu vérifient (ou seulement disent) que cette famille est libre pour obtenir une base.

Enfin, une grande partie des candidats pensent qu'une matrice de rotation est forcément sous sa forme canonique, quelle que soit la base dans laquelle on l'écrit !

Regrettons également que très peu de candidats utilisent les résultats obtenus dans cette partie pour obtenir les éléments caractéristiques de la rotation finale, et refont tous les calculs pour trouver l'axe de rotation par exemple.

Partie III

Le but de cette partie était d'obtenir l'équivalence

$$A \text{ antisymétrique} \iff \exists\, B \text{ orthogonale, } A = (I+B)^{-1}(I-B).$$

Cette partie, plus théorique, a été globalement mal traitée, exceptés les quelques calculs formels sur les matrices (même si des simplifications miraculeuses s'opèrent souvent). L'erreur la plus commune est l'argument « $AX = 0$ et A est non nulle donc $X = 0$ » (!!!). Peu de candidats font le lien entre le produit scalaire usuel et son expression matricielle et donc ne voient pas que $X^T X$ est en fait la norme euclidienne de X.

Partie IV

Là encore, cette partie tait plus théorique, et consistait à montrer que toute matrice antisymétrique est semblable à une matrice bloc de la forme

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où C est une matrice inversible d'ordre pair. A part les toutes premières questions élémentaires, cette partie a été très peu traitée, même la décomposition $Im\, f \oplus Ker\, f = \mathbb{R}^n$ pour un endomorphisme antisymétrique a posé des difficultés à la grande majorié des candidats.

Exercice de probabilités

Cet exercice demandait de faire quelques calculs en manipulant des sommes (principalement géométriques) mais le peu de soin qu'apportent les candidats pour ces calculs (en particulier pour la manipulation des indices) conduit à de nombreuses erreurs.

Notons un point très positif : les candidats obtenant une variance négative suite à des erreurs de calcul le signalent très souvent.

Une erreur très fréquente qui est apparue est la notion (magique) de système complets d'événements qui est utilisée comme le sésame obligatoire sans vraiment être maîtrisée. Ainsi, pour déterminer la loi du minimum de X et Y, beaucoup utilisent comme événements

$$\{X = k, Y \geq k\} \cup \{Y = k, X \geq k\}$$

qui ne sont pas disjoints !

Enfin, rappelons qu'une probabilité est un nombre, et que si l'événement dont on calcule la probabilité ne fait pas intervenir de paramètre (tel que k, n, ...), de tels pramètres ne peuvent pas apparaître dans le résultat final.

Les résultats concernant cet exercice ont été très disparates, certains candidats obtenant un nombre conséquent de points alors que d'autres ne l'abordent même pas. Ces notions de probabilités sont certes difficiles, mais nous ne pouvons qu'inciter les candidats à essayer de les comprendre car une fois celles-ci acquises, les exercices proposés sont alors très abordables et rapportent souvent de précieux points.