Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Le sujet portait cette année sur des calculs d'intégrales, propices à des questions connexes sur le programme des classes PTSI-PT. Après un préambule consacré à de la trigonométrie usuelle, la première partie proposait d'étudier des variantes, sous forme d'intégrales généralisées, des classiques intégrales de Wallis, conduisant à l'étude d'une série divergente. En seconde partie, à travers cette fois une intégrale à paramètres vérifiant une équation différentielle, et pouvant aussi s'exprimer comme la somme d'une série entière, on retrouvait les intégrales de Wallis.

Le sujet comportait, comme l'an dernier, des questions de cours, et des questions faciles, accessibles, ce qui a permis aux candidats de répondre à un nombre important de questions.
A côté, comme l'an dernier, d'autres questions étaient destinées à valoriser les candidats soigneux et rigoureux ; d'autres, plus difficiles, à départager les très bons candidats.

Comme l'an dernier, nous déplorons que les copies ne soient pas toujours bien présentées. Dans certains cas, les candidats écrivent de façon illisible, de façon extrêmement dense, la copie n'est pas aérée, ce n'est plus de la correction, mais du déchiffrage ... avec toutes les conséquences que cela implique.

L'orthographe n'est toujours pas maîtrisée, y compris celle de la terminologie mathématique usuelle :

> ≪ la règle de d'Alember, d'Allembert, d'Albert, d'alembert ≫ ;
>
> ≪ le therme ≫ ;
>
> ≪ un interval ≫ (pluriel : ≪ des intervals ≫).

Comme l'an passé, nous souhaitons faire quelques rappels de bon sens :

i. Il faut produire un raisonnement : recopier le résultat de la question n'est pas une preuve. Si le résultat attendu est donné dans l'énoncé, il faut prêter une attention particulière à la rédaction de la solution.

ii. Certains candidats manquent d'honnêteté intellectuelle en essayant de tromper le correcteur, effectuant un calcul manifestement faux mais en concluant avoir répondu. Chez certains, c'est même systématique. Dans ce cas la copie est pénalisée.

Remarques particulières

Préambule

1. Cette question a été traitée par la majorité des candidats.
   Si certains ont justifié avec soin la dérivabilité de la fonction h sur $]0, +\infty[$, ce n'est pas le cas de tous.
   D'autre part, de nombreux candidats trouvent une dérivée égale à 1 et en concluent que la fonction est constante, sans prendre de recul sur ce résultat.

2. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.

   (b) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.

   Toutefois, certains utilisent des méthodes excessivement et inutilement compliquées (études de fonctions notamment, quand ils ne croient pas prouver l'égalité en dérivant les deux fonctions mais, pour obtenir l'égalité des deux dérivées, ils utilisent l'égalité initiale devant être démontrée, c'est une entourloupe ou, au mieux, une erreur logique).
   D'autres « établissent » une inégalité entre les quantités. Ce n'est pas faux ... mais pas suffisant.

   (c) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats. Le jury rappelle que les calculs doivent être menés jusqu'au bout, et que ce n'est pas au correcteur de les finir.

Partie I

1. (a) Comme chaque année, de nombreuses erreurs :

   $\rightsquigarrow$ L'intégrale n'est pas forcément impropre qu'aux bornes : il faut d'abord étudier le domaine de continuité de l'intégrande.

   $\rightsquigarrow$ $e^{-x}\sin(x)$ n'est pas équivalent à e^{-x} au voisinage de $+\infty$.

   $\rightsquigarrow$ « $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\sin(x) = 0$ » ne prouve rien.

   $\rightsquigarrow$ Le critère de Riemann ne fonctionne que pour les fonctions de signe constant. Il fallait ici montrer l'absolue convergence.

   $\rightsquigarrow$ L'inégalité concerne les intégrandes et non pas les intégrales.

   (b) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.
   On trouve toutefois des réponses fantaisistes, des -1 alors que l'on intègre une fonction positive, des $\dfrac{1}{2}$.

   (c) Cette question a été traitée par une grande majorité des candidats.
   On rappelle que, la fonction donnée étant réelle, on attend un résultat réel, et non complexe.

   Enfin, on ne peut que conseiller aux candidats de dériver la primitive obtenue afin de vérifier qu'il n'y a pas d'erreur.

   (d) Cette question n'a pas été traitée correctement par de nombreux candidats.
   Croyant sans doute bien faire, une grande partie des candidats introduit, pour la première intégration par parties, et pas toujours très rigoureusement, des notations intermédiaires : « u », ou « $u(x)$ », « v », ou « $v(x)$ ». Ensuite, on voit apparaître sur la copie l'expression de I_n en fonction d'une intégrale avec des exponentielles, des fonctions trigonométriques, le n, sauf que l'on ne sait pas comment le candidat a fait le calcul !
   Le jury rappelle très fortement qu'un calcul, CE SONT DES EGALITES, et non des quantités disséminées un peu partout dans la copie (parfois sur trois pages très denses), égalités qui permettent de suivre ledit calcul.
   Cette intégration par parties, ainsi que la seconde, sont sujettes à l'introduction, par les candidats, de tas de notations intermédiaires : « J », « K », « H », etc ..., puis « w », ou « $w(x)$ », etc encore ...
   Tout ceci de façon extrêmement et inutilement compliquée, conduisant à de

nombreuses erreurs, d'autant plus quand les candidats ne simplifient pas des expressions de la forme :

$$-\left(-\frac{e^{-x}\ \{\cos x - \sin x\}}{2}\right)$$

voire pire.

Si certains aboutissent au bon résultat, d'autres essayent de faire illusion, on a vu ainsi, sur de nombreuses copies, des calculs qui commencent à peu près bien, se poursuivent longuement, puis, soudainement, comme par magie, une expression de la forme

$$I_n = n \times ... + (n-1) \times \dots$$

se transforme en une autre, de la forme :

$$I_n = \frac{n\ (n-1)}{n^2+1}\, I_{n-1}$$

De nombreux candidats ne dérivent pas correctement la fonction $x \mapsto \sin^n(x)$. Il faut préciser quelle fonction on intègre et quelle fonction on dérive ainsi que le caractère C^1 des fonctions à dériver, de façon claire et non inutilement compliquée comme nous l'avons déjà dit.
Une justification est attendue pour la nullité du crochet.

(e) Si cette question a été traitée par de nombreux candidats, d'autres donnent trop souvent le résultat sans preuve. En particulier, le fait que l'on fasse le produit des termes pairs et impairs est peu précisé. Nous rappelons également que les parenthèses sont importantes :

$$2\,n\,! \neq (2\,n)\,!$$

et

$$\prod_{k=0}^{n} 4\,k^2+1 \neq \prod_{k=0}^{n} \left(4\,k^2+1\right)$$

2. (a) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats.
Dans de nombreuses copies, les candidats affirment que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ suffit pour conclure que la série $\sum u_n$ converge.
De nombreuses copies ne précisent pas vers quoi tend le n ! On trouve ainsi de très nombreuses expressions de la forme « $\lim u_n = 0$ ».
Certains effectuent un développement asymptotique, mais sans aucune justification.

(b) De nombreux candidats donnent une réponse correcte, mais sans preuve. Ici aussi, le fait que l'on fasse la somme des termes pairs et impairs est peu précisé.

(c) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats.

Partie II

1. Cette question a été traitée par la majorité des candidats.

2. Cette question n'a pas été traitée correctement par de très nombreux candidats.

   Pour ce genre de question, le jury apprécie particulièrement que le théorème utilisé soit clairement énoncé au début de la résolution. Cela permet aussi au candidat de savoir où il va, ce qu'il doit vérifier et de le montrer, clairement, méthodiquement, et non de façon trop confuse comme cela est trop souvent le cas.

   Déjà, trop peu de candidats vérifient que le dénominateur ne s'annule pas. La domination est souvent affirmée sans aucune justification, quand elle est donnée correctement, beaucoup de candidats écrivant des inégalités comme

   $$\ll \frac{1}{(1-x\,\cos t)^2} \leq \frac{1}{(1-a)^2} \gg \text{ ou encore } \ll \frac{1}{(1-x\,\cos t)^2} \leq \frac{1}{(1-x)^2} \gg$$

   etc ...

3. Cette question n'a été traitée que par peu de candidats.
   Beaucoup se contentent de dire que cela vient de la question précédente, puisque ≪ a est quelconque ≫.
   Nous rappelons que les arguments comme ≪ la dérivabilité est une propriété locale ≫, ou ≪ en faisant tendre a vers 1 ≫ ne sont pas suffisants.
   Il faut préciser que tout réel x de l'intervalle $]-1,1[$ appartient à un segment de la forme $[-a,a]$, où a appartient à $]0,1[$, par exemple $a = \dfrac{|x|+1}{2}$, ou bien en précisant que

   $$\bigcup_{a\in]0,1[} [-a,a] =]-1,1[$$

   Certains candidats ont fait, de façon très judicieuse, un dessin d'illustration, qui a été apprécié par les correcteurs.

   Certains candidats pensent qu'il y a un problème en 0, alors que $0 \in [-a,a]$.

4. Cette question n'a pas été traitée correctement par tous les candidats.
   Si, en général, le calcul commence bien, il n'est pas toujours terminé, ou alors, des ≪ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ≫, des ≪ $\arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ ≫, sans aucune intégration préalable, apparaissent comme par magie, donnant l'illusion d'une réponse correcte. Ce genre de méthode a été fortement sanctionné.

5. Cette question a été traitée par la majorité des candidats.
   Certains ont cherché à donner des réponses fantaisistes : fonction paire, impaire, etc ...

6. (a) Si cette question a été traitée par de nombreux candidats, beaucoup confondent la variable intervenant dans le calcul d'une primitive, et la variable d'intégration, en écrivant « $\displaystyle\int \frac{-x}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(1-x^2)$ ».
   Nous rappelons que le résultat ne doit pas être gardé sous la forme « $e^{-\frac{1}{2}\,\ln(1-x^2)}$ ».

   (b) Là encore, si cette question a été traitée par de nombreux candidats, trop nombreux sont ceux qui ajoutent une constante en oubliant la solution de l'équation homogène.
   Beaucoup de candidats ne donnent pas la solution explicite, ils se contentent d'écrire

$$\lambda(x) = \ldots$$

   D'autres se trompent au moment de donner la solution, en écrivant que :

$$\text{«}\ y(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\ \text{»}$$

   (c) Cette question a été traitée correctement par les candidats ayant correctement répondu à la question précédente.

   (d) Cette question a été traitée correctement par les candidats ayant correctement répondu à la question précédente.

7. Cette question n'a été traitée que par peu de candidats.
   Quelques uns utilisent le résultat donné dans l'énoncé entre les questions 5 et 6, pour donner une illusion de réponse.

8. (a) De trop nombreux candidats écrivent que $a_1 = 1$ sans aucune autre justification. Nous précisons que cela n'est pas suffisant.

   (b) Cette question a été traitée correctement par la majorité des candidats, malgré quelques erreurs de calcul.

(c) Cette question a été traitée correctement par une grande partie des candidats.

Nous rappelons pour les autres qu'il peut être utile de vérifier que leur résultat est valide pour de petites valeurs de l'entier p.

9. (a) Cette question demandait d'énoncer le critère de d'Alembert pour les séries numériques.
Trop nombreux sont les candidats qui ne le font pas correctement.
On trouve ainsi, dans les copies, de nombreuses erreurs, comme chaque année : oubli de la valeur absolue, de la limite, du cas $\ell = 1$, confusion entre série numérique et série entière, etc ...

(b) Cette question n'a été traitée que par peu de candidats.

(c) Cette question a été traitée par un faible nombre de (très bons) candidats.

10. (a) Cette question est souvent bien résolue, mais de nombreux candidats n'ont pas eu le temps de traiter la suite de cette partie.

(b) Si de très nombreux candidats ont obtenu les valeurs de $\mathcal{W}_0$ et $\mathcal{W}_1$, très peu ont vu que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étaient égales.

(c) Cette question a en général été bien résolue.
Toutefois, un nombre non négligeable de candidats pensent qu'une relation entre $\mathcal{W}_{n+1}$ et $\mathcal{W}_{n-1}$ suffit pour étudier la monotonie de la suite $(\mathcal{W})_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Cette question n'a été traitée que par peu de candidats.

(e) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.

(f) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats.
Beaucoup affirment que, lorsque p tend vers l'infini, $\ll a_{2p} \sim a_{2p+1}$ car la suite converge $\gg$, plutôt qu'utiliser la question 10 (d).

(g) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats.
Le fait que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} x^n$ aient le même rayon de convergence est rarement précisé.

(h) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats.

(i) Cette question n'a été traitée que par peu de candidats.