Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

Cette année, l'épreuve débutait par un exercice de probabilités qui consistait à étudier une chaîne de Markov à deux états (aucune connaissance sur les chaînes de Markov n'était nécessaire), puis était suivie d'un problème d'algèbre linéaire, divisé en trois parties largement indépendantes.

Nous tenons tout d'abord à signaler une dégradation importante du soin apporté aux copies, beaucoup s'apparentant plus à un brouillon qu'à une copie de concours, propre et correctement rédigée.

Enfin, le niveau moyen des candidats est particulièrement inquiétant, le raisonnement mathématique étant remplacé dans beaucoup de copies par une dissertation philosophique, voire une invocation ésotérique. La filière PT n'a certes pas pour but de former des ingénieurs mathématiciens, mais on se demande comment certains étudiants peuvent avoir quelque compétence scientifique (en physique, mécanique, SI en général) avec un tel manque de maîtrise de l'outil mathématique.

Exercice de probabilités

Cet exercice étudiait une chaîne de Markov homogène à deux états. Nous considérions donc une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ à valeur dans $\{0,1\}$ dont les lois conditionnelles de X_{n+1} sachant X_n étaient données (en fonction de deux paramètres).

1. Dans un premier temps, il fallait trouver une relation de récurrence d'ordre un pour les probabilités $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$, résoudre explicitement cette relation puis trouver la limite de p_n quand $n \to +\infty$ (ce qui montre la convergence en loi de la chaîne vers la probabilité invariante quelle que soit la loi initiale).

   Il suffisait d'appliquer la formule des probabilités totales (pour un système d'événements composé de deux événements seulement) pour obtenir cette relation. Malheureusement, cette formule n'est pas énoncée correctement dans beaucoup de copies.

   Que dire également du raisonnement par récurrence qu'une grande majorité de candidats veut utiliser alors qu'il est inutile. Ils démontrent donc directement la formule demandée sans s'apercevoir qu'ils n'utilisent pas l'hypothèse de récurrence. Ceci est déjà très désagréable, mais bien moins que ceux pour qui le raisonnement par récurrence consiste à remplacer n par $n+1$ dans l'hypothèse de récurrence et ainsi affirmer que la propriété est vraie à l'ordre suivant.

Obtenir l'expression générale des termes d'une suite arithmt́ico-géométrique est ensuite d'une difficulté extrème pour beaucoup de candidats !

Enfin, pour qu'une suite de la forme ρ^n tende vers 0, il ne suffit pas d'avoir $\rho < 1$! De même, on peut s'interroger lorque l'on obtient une probabilité qui tend vers $+\infty$.

2. Nous nous placions ensuite sous la loi invariante et cherchions la loi conjointe du couple (X_1, X_2), et étudiions l'indépendance de ces variables.

   La notion de loi d'un couple de variables aléatoires n'est pas du tout mîtrisée. L'expression de l'espérance d'une variable de Bernoulli est en revanche connue, la variance beaucoup moins. Précisons qu'il faut s'inquiéter lorsque l'on obtient une variance nulle : cela signifie que la variable étudiée est constante.

   Parmi les trop rares candidats ayant obtenu la loi du couple, seule une poignée sont en mesure de calculer correctement la covariance des variables.

   Enfin, même les tous meilleurs candidats ne savent pas discuter selon les valeurs des paramètres. Ils obtiennent une expression (non identiquement nulle) pour la covariance et affirment qu'elle est non nulle alors que celle-ci s'annule pour certaines valeurs des paramètres.

   Une erreur classique que l'on a souvent retrouvée : la covariance nulle n'implique pas l'indépendance des variables.

3. Il fallait ensuite montrer que partant de $X_1 = 1$, la loi du temps pour obtenir un zéro dans la suite suivait une loi géométrique.

   La plupart des candidats arguent d'une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, alors qu'aucune variable de ce type n'apparait dans l'énoncé du problème. Le paramètre de la loi géométrique est d'ailleurs souvent un p qui n'est défini nulle part. De là à imaginer que certains candidats répètent des phrases toutes faites sans vraiment les comprendre ...

4. Nous étudiions dans cette question la loi du minimum et du maximum de deux variables aléatoires géométriques indépendantes.

   L'expression de la fonction génératrice d'une loi géométrique est souvent connue (il aurait été de bon ton de la retrouver par le calcul, mais cette absence n'a pas été pénalisée), celle de la somme de deux variables indépendantes beaucoup moins. Dans une rédaction correcte, il est bien de préciser que l'on obtient le produit des deux fonctions génératrices du fait de l'indépendance.

La manipulation des fonctions de répartition pour obtenir celle du minimum ou du maximum est en revanche très délicate pour la plupart des candidats avec beaucoup d'approximations, d'erreurs de calcul dans les séries géométriques ... Finalement, très peu de candidats ont obtenu les lois correctes au final.

5. Cette dernière question utilisait les résultats précédents sous un énoncé de modélisation. Elle n'a été abordée que par de très rares candidats et n'a quasiment jamais abouti.

Problème d'algèbre linéaire

Le but du problème était de donner une démonstration du théorème min-max de Courant-Fisher puis du théorème d'entrelacement de Cauchy. Ces résultats généraux n'étaient abordés que dans la troisième partie, les deux premières parties étudiant des propriétés plus simples mais préparant à la manipulation des objets de la dernière, plus théorique.

Partie I

Nous considérions ici deux matrices symétriques réelles d'ordre trois explicites (l'une n'admettant que des valeurs propres simples, l'autre ayant une valeur propre double) et étudiions le comportement asymtotique du rapport :

$$\frac{\langle A^{n+1}x, x\rangle}{\langle A^n x, x\rangle}.$$

1. Pour la matrice à valeurs propres simples, il fallait dans un premier temps diagonaliser explicitement celle-ci en précisant la base orthonormée de diagonalisation. Précisons que, contrairement à ce que l'on a vu très souvent, une matrice diagonalisable ne l'est pas forcément dans une base orthonormée et que ceci est une propriété supplémentaire des matrices symétriques.

   La diagonalisation est ensuite mieux (mais pas toujours) maîtrisée. L'utilisation de la règle de Sarrus n'est cependant pas la meilleure méthode pour calculer un polynôme caractéristique : on se retrouve avec un polynôme de degré trois dont on ne sait que faire. Beaucoup de candidats oublient ensuite de normaliser les vecteurs obtenus.

Venait ensuite **LA** question du problème qui conditionnait toute la suite : obtenir les expressions de $\langle x, x\rangle$ et de $\langle A^n x, x\rangle$ quand le vecteur x était décomposé dans la base orthonormée de vecteurs propres. Cela a définitivement disqualifié tous les candidats qui élèvent des vecteurs au carré, ceux pour qui le produit scalaire donne tout sauf un scalaire et ceux qui ne connaissent pas l'expression de la norme ou du produit scalaire dans une b.o.n. Cela représente environ la moitié des candidats ! Et encore avons nous laissé le bénéfice du doute à ceux qui font comme s'ils travaillaient dans la base canonique sans aucune justification, sans être vraiment surs qu'ils comprenaient ce qu'ils faisaient.

Montrer que la quantité $\langle A^n x, x\rangle$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang n'a été correctement traitée que par très peu de candidats. Et encore, même ceux qui avaient les bonnes idées oublient de discuter selon les valeurs des paramètres : la suite est effectivement équivalente à $\lambda_3^n\, x_3$ sauf quand x_3 est nul. Précisons que montrer que la suite ne s'annule pas pour les entiers pairs ne répond pas à la question.

La limite du rapport est ensuite beaucoup mieux traitée (du moins par ceux qui avaient obtenu l'expression correcte).

2. Pour éviter des calculs fastidieux, nous demandions de vérifier que la seconde matrice était diagonalisable dans la même base que la précédente. La plupart des candidats reprennent cependant tous les calculs depuis le début : calcul du polynôme caractéristique, calcul des sous-espaces propres. .. certains ne choisissant pas les bons vecteurs pour le sous-espace de dimension deux. Bref une approche très algorithmique des problèmes de mathématiques où on applique la recette que l'on a apprise. D'autres calculent $P^{-1}\, C\, P$, où P est la matrice de passage obtenue précédemment (sans s'apercevoir que $P^{-1} = P^T$ car la base est orthonormée) avec en général beaucoup d'erreurs de calcul. Tout ceci démontre un manque total de recul chez quasiment tous les candidats.

Partie II

Cette partie reprenait les résultats obtenus dans la première partie dans un cadre général. Elle ne pouvait être abordée que par ceux qui avaient obtenu une expression correcte des produits scalaires mentionnés plus haut. Elle a été globalement bien traitée par ceux-ci même si la rédaction aurait pu être bien souvent grandement améliorée, en précisant notamment où l'hypothèse $\langle x, e_d \rangle \neq 0$ intervenait et en montrant que le dénominateur ne s'annulait pas (cela ne semble poser problème à personne).

Exhiber un contre-exemple pour lequel la convergence n'avait pas lieu a été en revanche beaucoup plus difficile. Là aussi, il est désagréable de voir apparaitre des termes pouvant s'annuler au dénominateur.

Partie III

Nous abordions ici le théorème du min-max, à proprement parler.

Il fallait tout d'abord montrer que, si les valeurs propres sont rangées par valeurs croissantes, et si F_k est le sous-espace engendré par les vecteurs propres $(e_k, \ldots, e_d)$, alors

$$\min_{x \in F_k \setminus \{0\}} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

La minoration a en général été bien traitée (toujours par ceux qui avaient la bonne expression pour les produits scalaires). Le fait que le min soit atteint pour $x = e_k$ un peu moins, beaucoup disant que le minimum est atteint lorsque toutes les valeurs propres sont égales.

Il fallait montrer ensuite que tout sous-espace de dimension k intersectait F_k. Un simple argument de dimension donne le résultat, mais cela a donné lieu à beaucoup de digressions pas toujours très justes. La suite, plus délicate, n'a été que très peu traitée. Il faut tout de même souligner qu'un certain nombre de bons candidats ont obtenu le résultat min-max souhaité.

Nous revenions ensuite à des questions plus faciles, abordables même par les candidats qui avaient échoué précédemment. La plupart ont effectivement abordé ces questions, parfois avec succès. Il faut là encore regretter que le cours (expression du produit scalaire lorsque les vecteurs sont exprimés comme matrice colonne) n'est pas connu parfaitement. Il y avait ensuite une petite subtilité : la matrice Q vérifiait effectivement $Q^T Q = I$, mais n'était pas carrée. Ce n'était donc pas une matrice orthogonale.

Il fallait ensuite donner la dimension d'un sous-espace engendré par une famille de vecteurs. Il suffisait de dire que cette famille était orthogonale donc libre. Mais bien peu de candidats ont traité correctement cette question.

La fin de cette partie utilisait les résultats précédents pour démontrer le théorème d'entrelacement de Cauchy. Il s'agissait d'une question délicate qui n'a quasiment jamais été abordée.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

Présentation générale :

Le sujet de cette année se composait de deux parties indépendantes, s'appuyant sur une modélisation (faite) de deux manèges, la première partie abordant une large part du programme de géométrie dans l'espace et un tout petit peu d'algèbre linéaire, la seconde partie couvrant le programme de géométrie plane.
Le sujet était très proche du cours et de nombreuses questions consistaient a appliquer directement un résultat de celui-ci.

L'épreuve a parfaitement permis de classer les candidats.

Nous rappelons aux candidats que dans un sujet de géométrie, ils ne doivent pas hésiter à illustrer leurs réponses par un schéma.
Les candidats qui le font à bon escient sont récompensés.

Présentation des copies :

La présentation des copies s'est nettement dégradée cette année : écriture indéchiffrable ou minuscule, copies couvertes de ratures (avant la numérisation, nous aurions dit : couverte de ≪ blanco ≫), résultats non encadrés, questions ou parties non numérotées, orthographe et règles de grammaire non respectées y compris lorsqu'il s'agit de recopier une phrase écrite dans l'énoncé...
Nous avons bien souvent l'impression de lire des brouillons et non des copies rédigées.

Il est rappelé aux candidats que leurs copies sont destinées à être lues et que des points sont prévus dans le barème pour la présentation des copies.
Cette année, un peu plus d'un candidats sur cinq a obtenu les points de présentation.

Nous renvoyons aux rapports des années précédentes pour connaître les critères à respecter pour obtenir ces points.

On trouve heureusement aussi des copies, très agréables à lire, où on suit sans aucune difficulté le raisonnement et les calculs du candidat. Ces copies sont valorisées.

Rédaction :

Quelques conseils de rédaction que nous aimerions voir respectés :

• Les notations de l'énoncé doivent être respectées.
Si les candidats ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion.

• De même les consignes de l'énoncé doivent être respectées. Une réponse, même juste, qui ne respecte pas ces consignes ne peut pas être prise en compte.

• Tous les résultats doivent être justifiés. On trouve bien trop souvent des affirmations sans preuve.
Par ailleurs, quand un résultat est fourni par l'énoncé, il est impératif que le détail des calculs figure sur la copie afin de convaincre le correcteur qu'on ne cherche pas à l'arnaquer.

• Les correcteurs apprécient lorsque le candidat annonce quel est son objectif et encore plus lorsque le candidat à l'issue de ses calculs, termine la question par une conclusion (qu'il encadre).

• Les candidats doivent réfléchir à la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent. Ainsi, cela leur évitera de dériver une courbe ou d'écrire des égalités entre des objets de différentes natures.

• Dans un contexte de géométrie, il est souhaitable de les vecteurs soient écrits avec une flèche.

D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Avant de passer à ce détail, on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre et que comme indiqué sur le sujet, la feuille de papier millimétré doit être rendue avec la copie.

Première Partie.

1. (a) Des confusion entre la régularité de la courbe et celle de ses fonctions coordonnées.
De nombreux candidats se contentent d'affirmer que $\vec{V} \neq 0$.
Par ailleurs, ce n'est pas parce que sin et cos forment une famille libre ou sont déphasés qu'ils ne s'annulent pas en même temps.
La dérivée de $\sin^2$ a posé des problèmes à un certain nombre de candidats.
Il n'est pas question de gradient dans cette question !!!

   (b) Il n'était pas utile d'inventer un nom pour ce vecteur puisqu'il s'agissait du vecteur $\overrightarrow{V}(t)$. Il n'était pas non plus utile de le normer.

   (c) Réussie par un candidat sur deux. De très nombreuses erreurs de calculs en

particulier dans les coordonnées du point.
Un certain nombre de plans passent par O et pas par le point...

2. (a) Un candidat sur trois ne donne pas V et A mais $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{A}$ écrits avec ou sans flèche... Si en majorité, ils finissent par faire le calcul demandé dans les deux questions suivantes, les autres se lancent dans l'étude du maximum d'un vecteur...
Si les expressions de $\sin(2t)$ et $\cos(2t)$ en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$ sont bien connues (partie II questions 3d et 3e), nettement moins de candidats reconnaissent ces formules « dans l'autre sens » avec un petit avantage en faveur de $\cos(2t)$.
Des candidats ne simplifient pas $\cos^2(t) + \sin^2(t)$ et d'autres plus nombreux écrivent $\sqrt{1+a^2} = a$ (plus rarement $|a|$)... que qui donne des normes négatives sans que cela inquiète les candidats.

   (b) La majorité des candidats a pris le temps d'analyser la fonction et ne s'est pas lancé sans réflexion dans le calcul de la dérivée.
Si le minimum de V est souvent bien justifié. Il en est pas de même pour le maximum.
Quant aux adeptes de la dérivée, nous leur rappelons que ce n'est pas parce que $V'(t_0) = 0$ que $V(t_0)$ est un extremum (même local).

   (c) Les candidats ont souvent traité ou répondu à cette question « à l'envers »... quand on a trouvé une conclusion aux calculs...
Signalons que la dérivée de la norme n'est pas la norme de la dérivée.
Nous avons trouvé des réponses très diverses concernant la direction de $\vec{V}$ (justes ou non), sans aucune justification.

3. Σ n'est pas un cercle, ni un disque, ni une sphère...
Question généralement mal rédigée.

4. On aurait pu remarquer que le toit du manège ne recouvre que la moitié gauche du cheval de bois...

   (a) Question peu réussie. Les représentations paramétriques de $\mathcal{BT}$ proposées, dont on aimerait bien qu'on nous dise qu'il s'agit de cela, sont parfois fausses.

   (b) Un candidat sur 7 ne traite pas cette question ! et seulement 4 sur 7 donnent une bonne réponse.
Les candidats sont invités à simplifier $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$ et à terminer le calcul de $\sqrt{\dfrac{9}{16}+1}$.
On aurait bien aimé que $\dfrac{4}{5}\left(0, \dfrac{3}{4}, 1\right)$ soit simplifié en $\dfrac{1}{5}(1, 3, 4)$.

   (c) i. La caractérisation à l'aide des colonnes (dont l'orthographe est fluctuante...) de P n'est pas maîtrisée. D'ailleurs, la présence ou non du facteur $\dfrac{1}{5}$ dans ces colonnes semblent varier d'un calcul à l'autre.
Certains candidats calculent P^{-1} pour vérifier qu'il s'agit de ${}^tP$... ce qui est juste mais pas la méthode la plus efficace.
Quant au seul calcul du déterminant de P, il ne permet pas de conclure.

ii. Le calcul du noyau et de l'image sont sans intérêt pour une isométrie (c'est un résultat de cours). Celui du polynôme caractéristique est chronophage par rapport aux informations qu'il peut rapporter.
Pour les candidats qui savent ce qu'il faut faire, la nature de f puis l'axe de la rotation n'ont pas posé de problèmes majeurs (aux erreurs de calculs près).
Sauf que... l'axe de la rotation est une droite, pas un vecteur. Par ailleurs, il serait souhaitable que l'orientation de l'axe soit bien mise en évidence.
Beaucoup d'erreur pour le calcul du cosinus de l'angle, soit dans la résolution de l'équation $\mathrm{tr}(P) = 1 + 2\cos(\theta)$, soit dans le calcul de la trace de P. Dans ce dernier cas, on trouvait $\cos(\theta) = \dfrac{3}{2}$ sans que cela ne choque aucun des candidats concernés.
De nombreux candidats se sont perdus dans le calcul du sinus de l'angle.
Enfin, après tous les calculs, une conclusion finale pour répondre à la question serait vivement appréciée.

(d) Une fois éliminés les candidats qui ne comprennent pas la consigne « SANS calculs supplémentaires » et ceux qui annoncent (sous une forme ou une autre), que l'image d'une base orthonormée directe par une isométrie est une base orthonormée directe, il ne reste plus grand monde ...

(e) i. La formule de changement de base semble mieux connue. Malheureusement, le changement d'origine du repère a souvent été oublié ou mal traité.
Il est souvent difficile dans les copies de faire la différence entre z et Z voire entre (x, y, z) et (X, Y, Z).

ii. On déplore le grand nombre de candidats qui n'ayant pas la bonne formule à la question précédente parviennent quand même au résultat.

iii. On a vu beaucoup de cercles... mais 71% de bonnes réponses.
L'orthographe du mot « ellipse » est particulièrement peu respectée.
Par ailleurs, la nature de $\mathcal{BT}$ est indépendante du repère dans lequel l'équation est établie.

5. Cette erreur de montage est juste un prétexte pour les questions qui ont suivi. Elle est même absurde dès lors que λ n'est plus « très petit ».

(a) Cette question classique sur les surfaces de révolution est délaissée par un candidat sur trois. Seul un sur quatre propose une méthode qui fonctionne et un sur six va au bout du raisonnement... mais la rédaction reste encore à améliorer.

(b) Les candidats ayant proposé une représentation paramétrique dans la question précédente (et souvent ils n'ont pas su en déduire une équation cartésienne) ont généralement bien répondu à cette question.
La plupart des autres ont fini par écrire que la surface était engendré par les droites Δ_λ.
Précisons que pour cette question, nous attendons une description précise (qui peut être une représentation paramétrique) des droites génératrices.

(c) Beaucoup de candidat se sont perdus dans des calculs inutiles et ont abandonné avant la fin.

Deuxième Partie.

1. (a) Seulement 55% de réussite pour cette question de cours...
   (b) Et presque autant pour celle-ci.
   (c) Réponses souvent pas convaincantes et (presque) toujours mal rédigées.
   La variable de $f_{a,\theta}$ n'est pas un complexe mais un point et de plus $f_{a,\theta}$ n'est pas une application linéaire.

2. (a) Ces formules sont bien connues par 70% des candidats.
   (b) La méthode est connue ou retrouvée grâce à la réponse fournie.

3. (a) Les mots « affixe complexe » ont fait fuir 12% des candidats.
   Les autres sont généralement parvenus au résultat à grands renforts d'égalités entre 2 ou 3 des objets suivants : points, vecteurs, nombres complexes, vecteurs de coordonnées...
   (b) Parce qu'ils n'ont pas suffisamment mis en évidence $z(t)$ dans la question précédente, ou parce qu'ils n'ont pas voulu travailler avec les exponentielles complexes, les candidats se sont perdus dans les calculs des parties réelles et imaginaires (ou des coordonnées)... parvenant au résultat au prix parfois de quelques parenthèses oubliées et/ou de signes mal recopiés.
   Il y a rarement de conclusion après ces calculs et quand il y en a une, elle ne correspond pas à la question posée.
   Quant à la rotation demandée, elle n'a presque jamais de centre et les correcteurs sont invités à deviner que $\dfrac{2\pi}{3}$ est son angle.

   (c) Rédaction totalement chaotique pour cette question :
   Les candidats n'ont pas su comment et à quel moment gérer le résultat de la question précédente. Beaucoup ont fini par dire que M est $\dfrac{2\pi}{3}$-périodique. Dans le meilleur des cas, on nous propose qu'une seule rotation pour obtenir la courbe complète.
   L'effet sur la courbe de la périodicité (réelle ou supposée) n'est pas connu. On a des formules vagues du type « on répète la courbe par périodicité ».
   La parité est plutôt bien traitée et son effet sur la courbe relativement bien connue ... à condition que l'intervalle d'étude soit centré en 0.
   L'ordre des opérations n'est souvent pas bon.
   Il convient également de vérifier que l'opération proposée est compatible avec

la réduction d'intervalle (encore un mot mal orthographié dans les copies) souhaitée.

(d) Le calcul des dérivées de $t \mapsto \cos(2t)$ et $t \mapsto \sin(2t)$ a parfois posé problème. Les résultats étant donnés, le détail des calculs devaient figurer sur la copie. Il ne suffit pas de dire d'après la question 2.b., il faut faire le calcul !

(e) L'égalité $y'(t) = 2(1 - \cos(t))(1 + 2\cos(t))$ n'est presque jamais justifiée !

(f) Les signes de x' et y' ne sont presque jamais justifiés, trouver les valeurs où x' et y' s'annulent ne suffit pas. La plupart du temps, nous ne savons même pas quelle(s) expression(s) de x' et y' ont été utilisées.
Sur certaines copies le signe de x' semble uniquement déterminé par celui de $x'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ou par le sens de la flèche reliant $x(0)$ a $x\left(\frac{\pi}{3}\right)$!
De nombreuses erreurs de calculs pour les valeurs aux bornes (y compris en 0).

(g) On demandait une équation, pas une représentation paramétrique.
Les candidats ont souvent déterminé une équation de la normale.
Le fait que A appartienne à la tangente doit être justifié (même si cela consiste juste à écrire $2 + 0 \times \sqrt{3} = 2$).

(h) Il ne suffit pas d'écrire que $M(0)$ est un point singulier.
La symétrie de la courbe ne suffit pas pour donner la tangente et la nature du point.
Beaucoup d'erreurs de calcul. Le choix de l'expression de x' pour calculer x'' puis $x^{(3)}$ a souvent été malheureux.
Quant aux développement limités, les ordres ne sont pas toujours cohérents et il arrive même qu'il n'y ait plus de $o(t^n)$.
Les justifications sont souvent incomplètes.
En l'absence de précision dans l'énoncé, la tangente pouvait être décrite par une représentation paramétrique, une équation cartésienne, ou par le simple mot « horizontale ». On a également vu régulièrement « la tangente est nulle » ...

(i) La longueur a souvent été limitée à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$. Nous avons trouvé : « la tangente est le vecteur ... » Lorsqu'il y a un coefficient multiplicateur, il est, au mieux, justifié par un vague « d'après les symétries de la courbe ».
Les valeurs absolues dans $\sqrt{a^2} = |a|$ ont souvent été oubliées.
Enfin, les candidats qui trouvent une valeur négative ne sont pas choqués ...

(j) On a eu de jolies courbes, peu ressemblantes avec celle que l'on attendait et même parfois incohérentes avec la trajectoire d'un manège ...
Les consignes de l'énoncé doivent être respectées : couleurs différentes, légende, unité de 3cm.
Le repère ou au minimum l'unité doit apparaître clairement.
La tangente au point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ doit visiblement passer par le point A, autrement dit, il fallait tracer la droite.

4. (a) Souvent la dernière question abordée par les candidats et par conséquent faite dans la précipitation...

Les dernières questions ont été très peu abordées et tout commentaire serait non significatif.
Signalons juste qu'à la question 4.c., des candidats nous proposent de tracer toutes les normales à Γ pour en déduire Γ_1.

Un conseil aux futurs candidats pour finir : lorsque le temps imparti à l'épreuve est presque écoulé, il est préférable de ne traiter plus qu'une seule question et de la faire proprement et en totalité plutôt que d'en commencer trois ou quatre et de n'y rien écrire de concret.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Le sujet avait pour fil directeur cette année la fonction gaussienne $f\,:\,t \mapsto e^{-t^2}$. Le Préambule la faisait apparaître comme solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, propice à des questions sur le programme de première année : études de fonctions, calculs de dérivées où interviennent des polynômes, démonstration par récurrence.

La première partie était consacrée à l'étude d'intégrales généralisées, de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, e^{-x^2}\, dx$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^n\, e^{-x^2}\, dx$, $n \in \mathbb{N}$, et s'achevait sur des questions d'algèbre euclidienne : produit scalaire et application du procédé de Gram-Schmidt pour la détermination d'une base orthonormale.

La seconde partie faisait intervenir des intégrales à paramètres, qui, par un changement de variable simple, se ramènent à des intégrales fonctions de leurs bornes. Là encore, on balayait le programme avec des questions concernant les séries et séries entières - exponentielle et théorème d'intégration terme à terme.

La dernière partie mettait en jeu des probabilités : loi binomiale, théorème de transfert, loi faible des grands nombres. L'objet était de montrer que la fonction gaussienne peut s'obtenir comme limite d'une suite de fonctions polynomiales, ce qui permettait de faire le lien avec la première partie.

Cette épreuve a été un peu moins bien réussie que les années précédentes. Il est probable que le confinement de Mars 2020 et l'arrêt des cours en présence ait impacté les candidats. Ceci étant, un point ressort tout particulièrement : **une moins bonne connaissance du cours**. Les candidats essayent de s'en sortir sans, se perdent en tentatives hasardeuses, inventent ou cherchent à noyer le poisson. On ne peut espérer réussir en Mathématiques sans connaître impeccablement son cours.

Les correcteurs ont relevé, en outre, beaucoup de problèmes de rigueur, ainsi qu'un manque de recul sur les résultats obtenus. Il n'est pas rare de trouver dans une copie un résultat à un endroit, et son contraire un peu plus loin, sans que cela ne semble déranger le candidat.

S'il y a eu quelques excellentes copies, beaucoup sont très faibles, et montrent que les notions élémentaires ne sont pas maîtrisées (il n'est pas rare de voir que l'intégrale d'un produit est le produit des intégrales, ou encore la variable d'intégration qui « sort » de l'intégrale).

De nombreux candidats ont pensé trouver une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ (souvent $x \mapsto \dfrac{-e^{-x^2}}{2\,x}$) au milieu de la copie ...

Les correcteurs ont trouvé beaucoup de problèmes logiques et de raisonnement (absence ou mauvaise utilisation d'implications et d'équivalents, proposition de récurrence indépendante de n ou supposée vraie « pour tout n » dans l'hérédité ...). La question 1 de la partie I est éloquente à ce sujet : peu de candidats ont compris qu'il fallait montrer une équivalence.

Nous pouvons insister sur la bienveillance des correcteurs : il est fréquent d'accorder le point car le raisonnement semble correct malgré une erreur ou un problème logique.

Plus généralement, le fait qu'il faille dire qu'une limite existe ou qu'une intégrale ou une série converge avant de faire des calculs semble inconnu de la majorité des candidats. Par exemple, l'intégration par parties est souvent faite avant de préciser que le crochet converge. Là encore, insistons sur la bienveillance du jury (si on pénalisait cela, la moyenne serait bien plus basse...)

Si un résultat est évident, cela veut dire qu'il peut être justifié en une ligne. Le jury préférera toujours la justification à une phrase contenant un des mots « évident », « trivial », « forcément », « nécessairement » (liste non exhaustive).

On constate encore un grand nombre de candidats n'ayant aucune maîtrise en probabilités, ne faisant pas la différence entre un événement et une variable aléatoire. La troisième partie est peu traitée.

En ce qui concerne la présentation, si elle est globalement convenable, elle n'est pas excessivement soignée non plus. Nous rappelons que les traits se tirent à la règle.

Remarques particulières

Préambule

1. De nombreux candidats donnent comme réponse $A\,e^{-x^2}$, sans préciser à quel ensemble appartient la constante A. Beaucoup ne donnent pas la fonction f comme cela est demandé dans l'énoncé. Soit c'est fait à la question suivante, soit pas du tout.

   Un nombre non négligeable de candidats semble avoir été perturbé par le fait que la variable est x et pensent qu'il s'agit d'une constante, en donnant une réponse du genre $f(t) = e^{-2\,x\,t}$, alors que la forme donnée est exactement celle du programme des classes de Mathématiques PTSI :

$$y' + a(x)\,y = b(x)$$

2. A cette question, où il fallait calculer des dérivées seconde et troisième, les correcteurs ont noté l'oubli classique : les candidats, majoritairement, ne précisent pas pourquoi la fonction est dérivable trois fois.

   D'autre part, nous rappelons qu'**il faut finir les calculs** : répondre

$$f(x) = \left(-8\,x^3 + 4\,x + 8\,x\right)\,e^{-x^2}$$

   ou encore pire et plus compliqué, n'est pas acceptable. Fait inquiétant : de trop nombreux candidats ne savent pas dériver un produit de fonctions dérivables. Plusieurs dizaines de copies contiennent les formules suivantes : « $f'(t) = -2\,t\,e^{-t^2}$ », « $f''(t) = 4\,t^2\,e^{-t^2}$ », « $f'''(t) = -\,8\,t^3\,e^{-t^2}$ ».

3. Très peu de candidats ont correctement justifié l'existence des maxima demandés :

$$\max_{t\,\in\,[0,1]} |f(t)| \quad , \quad \max_{t\,\in\,\mathbb{R}} |f'(t)| \quad \text{et} \quad \max_{t\,\in\,[0,1]} |f'(t)|$$

   Pour l'existence des maxima sur $[0,1]$, le mot *segment* est bien souvent omis, ou oublié.

   Nous rappelons aussi que :

$$|f|' \neq |f'|$$

   Au lieu de vraiment étudier les fonctions, et de s'appuyer sur **un tableau de variations**, de nombreux candidats se lancent dans des pseudo-raisonnements, longs et confus. Ils affirment que les extremums coïncident avec les valeurs d'annulation des dérivées, ce qui n'est pas toujours le cas. Nous avons aussi trouvé, de nombreuses fois « f est décroissante sur $[0,1]$, et donc $\max f(t) = f(0)$ », sans préciser que f est positive.

De nombreux candidats écrivent que les maxima sont **nuls**, **infinis**, ou donnent **des valeurs négatives**, alors que c'est **une valeur absolue** qui est en jeu, sans que cela ne semble les perturber.

D'autres, toujours nombreux, affirment qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet un maximum. Le fait que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in [0,1]$ est peu vérifié.

4. (a) Le théorème des accroissements finis a rarement été bien énoncé. On trouve souvent une division par $b-a$ sans avoir précisé que $b \neq a$. Les hypothèses exactes du théorème sont peu connues.

   Ce théorème a, en outre, souvent été confondu avec celui de Rolle.

   (b) Cette question a été rarement bien traitée. Les quantificateurs sont confondus les uns avec les autres : on ne demandait pas de trouver ε.

   D'autre part, le fait que le réel c dépende de x et y est rarement vu. De très nombreuses copies assurent que la question est une réécriture du caractère continu de la fonction, montrant ainsi la méconnaissance de la définition de la continuité.

5. Cette question n'a pas toujours été bien traitée. Peu de candidats vérifient que H_{n+1} est bien un polynôme.
   La preuve de la parité est rarement faite : c'est souvent une entourloupe.
   Pour le degré, on rappelle que, étant donné deux polynômes P et Q :

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

   avec égalité si les degrés sont distincts. Il serait bon de le préciser ici. Répondre que le résultat découle d'une « récurrence immédiate » après avoir vérifié les trois premiers cas est inadmissible.
   D'autre part, affirmer que le degré est n et la parité est celle de n sans donner de justification ne suffit pas.

6. Beaucoup de candidats donnent la bonne réponse, mais sans avoir précisé le premier terme de la suite.
   De très nombreux candidats confondent le terme dominant et le coefficient dominant, donnant ainsi une égalité entre $a(H_n)$ et $(-2)^n\ x^n$.

Partie I

1. Que d'horreurs dans cette question. Nous rappelons qu'avant d'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt$$

il faut vérifier si les intégrales convergent.
De nombreux candidats font un changement de variables sans parler de convergence.

En ce qui concerne le changement de variables en lui-même, trop de copies ne font pas les choses rigoureusement. Nous avons trouvé, à maintes reprises :

$$\int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} g(-t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt$$

ce qui ne laisse pas au correcteur la possibilité de savoir si le candidat sait vraiment faire le changement de variable comme attendu :

$$\int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} g(-t)\,dt = -\int_{+\infty}^{0} g(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt$$

C'est en général dans ces mêmes copies que l'on trouve ensuite, pour une fonction paire :

$$\int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt = -\int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt$$

De nombreux candidats se contentent de dire que si la fonction g est impaire, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t)dt = 0$.
Un argument vague de symétrie par rapport à l'axe des ordonnées n'est pas suffisant pour répondre rigoureusement.

Enfin, une erreur déjà vue les années précédentes :

« $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t)dt$ converge ssi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} g(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$ ».

2. Dans cette question, où il fallait étudier la convergence des intégrales I_n et J_n, nous rappelons que le critère de Riemann, ou « règle du $t^\alpha f(t)$ » n'est pas au programme : il faut détailler davantage le raisonnement.

Nous avons aussi trouvé de nombreux candidats qui écrivent que « $x^n\, e^{-x^2} \sim e^{-x^2}$ », souvent lu : « $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n\, e^{-x^2} = 0$, l'intégrale est donc faussement impropre en $+\infty$ ».

On voit d'ailleurs ensuite souvent écrit que « $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge ».

Enfin, il n'est pas évident du tout que $x^n\, e^{-x^2} = o\left(e^{-x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

3. Pour cette question, où on attendait une relation entre I_n et J_n, la réponse est souvent donnée sans preuve. Il fallait préciser que la fonction $x \mapsto x^n\, e^{-x^2}$ est de même parité que l'entier n.

4. Pour cette question, où il fallait calculer I_1, un certain nombre de candidats trouvent un résultat négatif, sans prendre de recul sur ce résultat. D'autres donnent zéro.

5. Il fallait ici déterminer, pour tout entier naturel n, à l'aide d'une intégration par parties, une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

   De très nombreux candidats se lancent dans des études de crochets, de limites : certes, mais dans la mesure où l'intégration par parties n'est pas explicitée, quel sens cela a-t-il ? Ou alors, cela demande un tel effort de reconstitution au correcteur que cela ne peut être considéré comme une réponse.

   Il faut, **au minimum**, que l'on trouve, explicitement :

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1}\, x^{n+1}\, e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} 2\, x^{n+1}\, x\, e^{-x^2}\, dx$$

   ou encore

$$I_n = \lim_{X \to +\infty} \left[\frac{1}{n+1}\, x^{n+1}\, e^{-x^2}\right]_0^{X} + \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} 2\, x^{n+1}\, x\, e^{-x^2}\, dx$$

   avec **une égalité**, et non **des expressions un peu partout sans lien entre elles**.

6. Dans cette question, où le résultat était donné dans l'énoncé, il fallait soigner la rédaction, par exemple en précisant que l'on multiplie par les termes pairs au numérateur et au dénominateur.

   Pour le calcul des intégrales I_{2k+1}, beaucoup de candidats ont fait des tentatives. Nombreux sont ceux qui écrivent, pour un entier k : « $\left(k + \dfrac{1}{2}\right)!$ » sans sourciller.

   Beaucoup de candidats, qui n'ont pas obtenu le résultat de convergence de la question 2., y font référence. Malheureusement, il n'est pas possible de gagner des points ainsi.

7. (a) De nombreux candidats ont ici affirmé que « $x^2\, P(x)\, e^{-x^2} \to 0$ par croissances comparées ». Il faut davantage de détails, par exemple, prendre un équivalent de $P(x)$ au voisinage de $+\infty$.

(b) Cette question, plus fine, n'a été que peu traitée.

De nombreux candidats pensent que « $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 0 \Rightarrow f = 0$ », sans même prendre en compte le signe de la fonction.
Quant à l'argument de continuité, il est peu énoncé.

Nous signalons aussi que « le théorème de la fonction nulle » n'existe pas.

Enfin, un nombre non négligeable de réponses affirment que :
« $x \mapsto Q(x)^2\, e^{-x^2}$ est une fonction paire ».

A noter : lorsque l'on a prouvé que $Q(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, il n'est pas nécessaire de mentionner l'infinité de racines pour conclure que $Q = 0$.

(c) Cette question, où il fallait montrer que l'application donnée était un produit scalaire, a été bien réalisée dans l'ensemble. Certains candidats donnent cependant le sentiment de mal maîtriser la différence entre une inégalité stricte et une inégalité large. Il n'est pas rare de lire « pour tout polynôme P, $\phi(P,P) > 0$ », pour prouver la positivité, puis, à la ligne suivante « $\phi(P,P) = 0 \Rightarrow P = 0$ », ou encore, écho à la question 7.b, que « si une fonction f est strictement positive, continue et d'intégrale nulle, alors f est la fonction nulle ».

Un nombre non négligeable de candidats confond linéarité et homogénéité. D'autres, encore, que la positivité signifie que, pour tous les polynômes P et Q : « $\langle P, Q\rangle \geq 0$ ».

(d) Cette question, où il fallait justifier $\langle H_0, H_1\rangle = 0$, a été bien traitée dans l'ensemble, malgré l'erreur consistant à dire que l'intégrale est nulle car la fonction est impaire, sans préciser la convergence.

A noter : un certain nombre de candidats n'ayant pas réussi correctement la question 3., ne peuvent se prévaloir du résultat de celle-ci.

(e) Dans cette question, où il fallait construire une base orthonormée du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par H_0, H_1 et H_2, les correcteurs ont trouvé tout et n'importe quoi.

Il fallait appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt (à orthographier correctement : ce n'est pas « Gramm Smith », « Gram Schmitt », entre autres) : si le procédé semble globalement connu des candidats, rares sont ceux qui expliquent ce qu'ils font. En gros, les copies sont pleines d'expressions et de calculs, de formules magiques, de coefficients non définis.
Il fallait, au minimum, soit déjà justifier que H_0, H_1 et H_2 étaient deux à deux orthogonaux, et donc expliquer qu'il suffisait de normer ces vecteurs, soit, rappeler que, à l'étape i du procédé, chaque vecteur est construit comme combinaison linéaire des vecteurs obtenus jusqu'à l'étape $i-1$, et du $i^{ième}$ vecteur de la base

de départ, et qu'il faut vérifier à la fois les conditions d'orthogonalité avec les vecteurs obtenus jusqu'à l'étape $i-1$, et normer le vecteur. En l'adaptant à la question posée, cela s'écrit assez simplement, plus en tout cas que les formules épouvantables trouvées sur maintes et maintes copies.

Les calculs associés sont d'ailleurs rarement bien menés jusqu'au bout.

Enfin, un nombre non négligeable de copies traite cette question, comme la précédente, avec un produit scalaire farfelu, en écrivant les polynômes sous forme de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et en utilisant ensuite le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^3$.

Partie II

1. La parité de la fonction F a, le plus souvent, été correctement traitée.

   Nous rappelons toutefois qu'une fonction est **impaire**, et non « impair ».

2. Dans cette seconde question, où on attendait un changement de variable, de nombreux candidats divisent par x, sans préciser que celui-ci est non nul.

3. Les théorèmes concernant les intégrales à paramètre sont souvent mal utilisés, avec des dominations non justifiées. Ils sont parfois utilisés avec le paramètre x dans les bornes de l'intégrale.
   La dérivée partielle est rarement correcte (oubli du t^2 fréquent). Le lien avec la fonction f du préambule doit être expliqué (il y a une composition de fonction à détailler).
   Quelques rares candidats utilisent à profit la question précédente. Notons que le cas d'une intégrale à paramètre où f est de classe C^1 sur $I \times J$, où J est un segment, figure dans la colonne de droite du programme (intitulée « capacités et commentaires »). Il s'agit donc d'un résultat que les candidats doivent connaître, mais qu'ils doivent prouver à chaque utilisation, en vérifiant les hypothèses du théorème concerné. Si c'était un résultat de cours, il serait dans la colonne de gauche.

4. En ce qui concerne le calcul de

   $$\lim_{x \to +\infty} F(x)$$

   les correcteurs ont trouvé quelques horreurs, comme « $\displaystyle\int_{+\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du$ ».
   En regard, nous avons vu une écriture intéressante, de la forme « $F(x) = G(2\,x) - G(x)$ », mais, pour conclure, il aurait alors fallu justifier que la fonction G admet une limite en $+\infty$. Admettre le résultat de la question 7. pour en déduire la limite n'est pas acceptable.

5. Cette question, concernant la convergence de la série de terme général $F(2^n)$, n'a été que très peu traitée. On ne peut pas faire de calcul sur la somme de la série avant d'avoir prouvé sa convergence : il faut revenir aux sommes partielles.

6. (a) Peu de candidats ont donné l'expression de la dérivée de la fonction F. Ceux qui ont su utiliser la question 2. ont correctement répondu à la question. Nous avons noté des erreurs concernant la dérivée d'une fonction composée (oubli fréquent du 2).
   Certains candidats déduisent les variations de F uniquement à partir des points où sa dérivée F' s'annule, sans regarder le signe. A noter : la dérivée de F ne peut s'annuler en un réel dépendant de t, qui est une variable muette.

   (b) Pour résoudre : $F'(x) = 0$, nous avons souvent vu des équivalences du genre « $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \displaystyle\int f(x) \leq \int g(x)$ » (on notera, en prime, l'absence du dx).

   (c) On demandait ici d'étudier les variations de la fonction F. On rappelle qu'un tableau de variations doit être **complet**, avec les valeurs aux bornes, et les limites. D'autre part, de nombreux candidats, qui avaient montré l'imparité de la fonction, donnent des tableaux en parfaite contradiction avec cette même imparité ...

7. Cette question a été peu traitée, mais bien faite dans l'ensemble.

8. L'allure du graphe de la fonction F a été correctement donnée par les candidats ayant répondu à cette question. Nous avons quand même trouvé des courbes complètement fantaisistes, en contradiction avec le tableau de variation, des segments de droites, ...

9. (a) Concernant spécifiquement cette question, qui consistait à appliquer le théorème fondamental de l'analyse, les personnes écrivant pêle-mêle toutes les données sur F glanées dans l'énoncé n'ont pas obtenu les points de la question.

   (b) L'existence de la limite ℓ_G dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ n'a été que peu souvent donnée.

   (c) Nous avons trouvé quelques réponses fantaisistes pour l'existence de la limite. Une inégalité n'est pas conservée « en primitivant ». Nous rappelons également qu'une primitive est définie à une constante additive près, il n'est donc pas possible de conserver d'inégalité en passant aux primitives.

10. (a) Le développement en série entière de la fonction exponentielle semble connu. Toutefois, certains candidats le confondent encore avec un développement limité à l'ordre n

   (b) Le développement en série entière de la fonction F a, en général, été obtenu par les candidats ayant abordé la question. L'interversion série-intégrale est peu justifiée, ce qui impacte, par conséquence, la partie de la réponse concernant le rayon de convergence.

Partie III

1. Dans cette question, les calculs sont rarement faits : ils sont quelquefois corrects, mais pas toujours. Certains candidats passent, de façon magique, de

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n\,!}{(k-1)\,!\,(n-k)\,!}\, x^k\,(1-x)^{n-k}$$

   (noter le $()k-1)\,!$), à

$$\sum_{k=1}^{n} x\,\frac{n\,!}{k\,!\,(n-k-1)\,!}\, x^{k-1}\,(1-x)^{n-k-1}$$

   D'autre part, si l'on souhaite appliquer des formules qui ne figurent pas au programme - ≪ Formule du chef ≫, ≪ Formule des chefs ≫, il faut les expliciter et les redémontrer.

   Enfin, on ne peut pas parler de loi binomiale de paramètres (n, x) pour $x \in \mathbb{R}$.

2. Si la majeure partie des candidats ayant abordé cette question a reconnu la loi binomiale, encore faut-il en redonner la définition lorsque l'on y fait référence.

   Nous avons lu dans quelques copies : ≪ S_n suit une loi de Bernouille ≫.

3. (a) Les candidats ayant répondu à cette question ne justifient pas tous leur résultat : il fallait faire référence au théorème de transfert.

   (b) Très peu de candidats ont correctement énoncé la loi faible des grands nombres. Nous avons trouvé un grand nombre de réponses fantaisistes, comme : ≪ lorsqu'il y a un grand nombre, cela converge vers la même valeur ≫.

   (c) Tous les candidats ayant compris que l'ensemble donné était $\mathbb{N}$ tout entier n'ont pas toujours su justifier correctement leur réponse. Certains parlent de ≪ probabilité de l'événement certain ≫, ≪ événements incompatibles ≫.

   (d) Seules les très bonnes copies ont correctement traité cette question. Quelques candidats, qui n'y sont pas arrivé, ont toutefois compris qu'il s'agissait de montrer que la fonction f était limite d'une suite de polynômes.