MATHEMATIQUES A.

Présentation générale :
Le sujet de cette année consistait en un problème d'algèbre et de probabilités. Ce problème était composé de 3 parties, les deux dernières utilisant certains résultats de la première.
La première partie consistait à calculer les puissances d'une matrice sysmétrique réelle en la diagonalisant, la seconde étudiait un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ puis s'intéressait aux droites vectorielles ayant le même orthogonal pour 2 produits scalaires différents.
Enfin, la troisième partie abordait les probabilités : lois usuelles, chaîne de Markov, fonctions génératrices... ainsi qu'un peu de PYTHON
Les parties I et III du sujet étaient très proches du cours et du type d'exercices que les candidats ont rencontrés pendant leurs deux années de CPGE.
La seconde partie était plus difficile.
Le barème se répartit équitablement entre algèbre d'une part et probabilités d'autre part.
L'épreuve a parfaitement permis de classer les candidats.

Présentation des copies :
La présentation des copies laisse toujours à désirer cette année : écriture indéchiffrable ou minuscule, copies couvertes de ratures, résultats non encadrés, questions ou parties non numérotées, orthographe et règles de grammaire non respectées y compris lorsqu'il s'agit de recopier une phrase écrite dans l'énoncé, usage abusif d'abréviations...
Nous avons bien souvent l'impression de lire des brouillons et non des copies rédigées.

Il est rappelé aux candidats que leurs copies sont destinées à être lues et que des points sont prévus dans le barème pour la présentation des copies.
Cette année, moins d'un candidats sur sept a obtenu tous les points de présentation et un sur deux n'en a obtenu aucun.

On trouve heureusement aussi des copies, très agréables à lire, où on suit sans aucune difficulté le raisonnement et les calculs du candidats. Ces copies sont valorisées.

Rédaction :
Quelques conseils de rédaction que nous aimerions voir respectés :

• Les notations de l'énoncé doivent être respectées.

Si les candidats ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion.

• De même les consignes de l'énoncé doivent être respectées. Une réponse, même juste, qui ne respecte pas ces consignes ne peut pas être prise en compte.

• Tous les résultats doivent être justifiés. On trouve bien trop souvent des affirmations sans preuve.

Par ailleurs, quand un résultat est fourni par l'énoncé, il est impératif que le détail des calculs figure sur la copie afin de convaincre le correcteur qu'on ne cherche pas à l'arnaquer.

• Les correcteurs apprécient que le candidat annonce quel est son objectif et encore plus que le candidat à l'issue de ses calculs, termine la question par une conclusion (qu'il encadre).

• Les candidats doivent réfléchir à la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent. Ainsi, cela leur évitera d'écrire des égalités entre des objets de différentes natures.

D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Par ailleurs, il était possible dans ce problème de vérifier très rapidement la cohérence de nombreux résultats obtenus.
Nous invitons les candidats à le faire et en cas d'incohérence, à reprendre leurs calculs ou au minimum à indiquer au correcteur pourquoi ils pensent que leurs résultats sont faux.

Première Partie

1. La majeure partie des candidats a reconnu une matrice symétrique, malheureusement, un candidat sur 5 oublie de préciser qu'elle est à coefficients réels.
   De plus les candidats sont invités à respecter l'orthographe de « théorème spectral ».
2. Question largement réussie par les candidats. Un simple calcul de trace aurait permis de corriger les quelques erreurs rencontrées.
   Des confusions (ainsi que dans la question suivante) entre « $=$ », « $\Leftrightarrow$ » et « $\underset{L}{\sim}$ ».
   Enfin, les phrases « les valeurs propres de A sont 1, 2 et 4 » et « L'ensemble des valeurs propres (ou le spectre) de A est $\{1\,;\,2\,;\,4\}$ » sont correctes mais pas la phrase « les valeurs propres de A sont $\{1\,;\,2\,;\,4\}$ ».
3. Les valeurs des sous-espaces propres doivent être justifiées et les systèmes résolus par équivalence.
   La matrice P n'est pas orthogonale dans deux copies sur trois.
   Il n'est pas rare de constater des confusions entre vecteurs-ligne et vecteurs-colonne avec des produits qui n'existent pas : $X = (x, y, z) \in E(1) \Leftrightarrow AX = X$.... donc $E(1) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. On attendait ici une démonstration par récurrence. Le procédé semble acquis par un grand nombre de candidats.
   Les initialisations sont souvent mal rédigées, et parfois faites pour $n = 1$ au lieu de $n = 0$.
   On note aussi la présence de quelques $\forall n \in \mathbb{N}$, dans $\mathcal{P}(n)$.
   Enfin, des candidats parlent de « la propriété » sans que celle-ci ait été définie.
5. Les calculs intermédiaires doivent impérativement figurer sur la copie !
   Pour une raison inconnue, de nombreux candidats qui disposent de P, D^n et P^{-1} (qu'ils ont parfois calculé) ne font pas le calcul PD^nP^{-1}.
   De nombreuses erreurs de calcul auraient pu être rectifiées en remarquant que la matrice A^n aurait dû être symétrique ou en remplaçant n par 0 ou 1.
   Bien qu'utile en partie III, la valeur de A^n n'avait pas été donnée pour éviter que la correction de cette question se résume à une chasse aux arnaques...
6. Beaucoup d'affirmation dans cette question qui n'a pas toujours été comprise, en particulier, on a souvent « A' n'est pas symétrique car le théorème spectral n'est pas une équivalence ».
   Certains candidats essayent de démontrer que la matrice est orthogonale ($A'^t A' = I$).

Deuxième Partie.

1. (a) Les candidats ont presque toujours oublié de justifier que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors que beaucoup en auraient eu besoin pour démontrer la symétrie.
   Celle-ci est d'ailleurs souvent une tentative d'escroquerie, les transposées apparaissant ou disparaissant suivant les besoins.
   Les candidats ont privilégié la linéarité à gauche, avec des confusions entre « linéarité » et « distributivité » alors que la linéarité à droite était plus simple.

   (b) La formule de changement de base n'est maîtrisée que par un peu moins de la moitié des candidats. La nouvelle base devait être précisée, ce qui n'a pas toujours été le cas. On rencontre également quelques projections ou des dérivées...

   (c) Question relativement bien réussie.

   (d) Les candidats savent généralement ce qu'ils doivent démontrer mais ce n'est pas toujours bien fait.
   En particulier, si $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(u, u) > 0$ alors l'équation $\varphi(u, u) = 0$ ne peut pas avoir de solution.

2. (a) De nombreux candidats s'arrêtent à $< u\,; v >= 0$. En fait, ils ont souvent redémontré que les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux.
   Certains ont voulu utiliser les expressions des vecteurs propres obtenus dans la partie I. Cela était parfaitement possible, condition de tester les 3 couples possibles et pas uniquement 1 seul.

   (b) Question totalement ratée. Rares sont les candidats qui ont pensé à normer les vecteurs à l'aide de la norme associée au produit scalaire φ et parmi ceux-ci, certains ont utilisé l'expression de la question 1.(c).
   De plus, certains candidats veulent utiliser le produit vectoriel qui ne peut pas fonctionner avec le produit scalaire φ. On voit également de rares tentatives pour orthonormaliser la base canonique.

3. Très peu de candidats ont pensé à utiliser la question 2.
   On trouve dans les démonstrations proposées des simplification par λ sans que les candidats s'assurent que celui-ci est non nul.

4. (a) Les réponses sont parfois inutilement compliquées. Par ailleurs, il est demandé une base et répondre $F_i = Vect(j, k)$ n'est pas conforme à cette demande.
   Cette question ainsi que la précédente a été traitée par environ les deux tiers des candidats.
   A partir de la question suivante, plus de la moitié des candidats s'est abstenue.

   (b) Question peu réussie. On trouve parfois des bases contenant 3 vecteurs ou le vecteur nul.
   Des candidats calculent $f(j)$ et $f(k)$ ou déterminent les coordonnées de j et k dans une autre base...

   (c) $F_i \neq F_i'$ est souvent affirmée, bien plus rarement justifiée.
   Les candidats ayant répondu aux questions précédentes, ont généralement trouvé l'intersection.
   Les correcteurs ne sont pas contre le fait que les candidats leur fournissent des arguments de géométrie : « l'intersection de 2 plans (de $\mathbb{R}^3$) sécants non confondus est une droite ».

5. Ces deux questions ont été bien traitées dès lors que les candidats ont constaté que $\varphi(u,v) = < u\,;\, f(v) >$.
   Les démonstrations manquent parfois d'efficacité car la symétrie du produit scalaire n'est pas ou mal exploitée.
6. Ces deux questions sont très peu réussies.
   Les démonstrations proposées sont souvent confuses : quelle est l'hypothèse ? quel est l'objectif ?
   Les inclusions se transforment en égalité (quand elles ne changent pas plusieurs fois de sens).
   On ne peut pas faire le produit scalaire d'un vecteur et d'un espace vectoriel et il n'est pas possible d'avoir $u \in F_u$.
   On trouve également $AU = 0 \Rightarrow U = 0$ car $A \neq 0$...

Troisième Partie : Jouons au golf.

1. (a) Comme on pouvait s'y attendre, les correcteurs ont trouvé de nombreuses lois géométriques (au paramètre souvent non précisé et à l'univers image faux) mais aussi quelques lois normales (!), équiprobables ou binomiales.
   Donner la loi d'une variable aléatoire consiste à donner son univers image ainsi que les probabilités $P(X = k)$ associées.
   Ici, on n'a pas toujours l'univers image. Quant aux probabilités, elles doivent être soigneusement justifiées (un arbre peut aider mais ne suffit pas) à l'aide de formules du cours (ici probabilités conditionnelles).
   Par ailleurs, les candidats sont invités à vérifier que la somme des probabilités obtenues est égale à 1.

   (b) Les formules de l'espérance et de la variance de la loi uniforme (ou géométrique) sont relativement bien connues... sauf que certains candidats ne remplacent pas n, p par leurs valeurs...
   Le « en déduire » n'excluait pas un calcul puisque ce calcul utilisait une partie de la réponse à la question précédente.
   Enfin, l'interprétation de la valeur de l'espérance aurait dû permettre aux candidats de détecter une erreur : $\frac{1}{3}$, $\frac{13}{3}$ et même 1 et 3 ne pouvaient pas être possibles... de même qu'une variance négative (la formule de Koenig-Huygens n'est pas toujours maîtrisée).

2. (a) La plupart des candidats ont identifié une loi binomiale pour laquelle, on souhaiterait avoir le nom complet, plutôt qu'une notation ou abréviation. Sauf que :
   * L'indépendance des expériences de Bernoulli est peu mentionnée et/ou justifiée ;
   * Le lien entre J et les expériences précédentes n'est pas toujours donné ;
   * Les valeurs des paramètres sont souvent fausses : $n = 48$, $p = \frac{1}{11}$... Les candidats sont d'ailleurs invités à simplifier les fractions.
   * Il en est de même pour l'univers image : oubli de 0 (entre autres) et $[0\,;\,36]$ au lieu de $[\![0\,;\,36]\!]$.
   * Les probabilités ont perdu le coefficient binomial ou gagné une somme.
   Les candidats sont invités à définir q.

(b) La moitié des candidats savent qu'on leur demande l'espérance et en connaissent (ou savent retrouver) l'expression.

3. (a) Il semble que la loi de Poisson (avec une majuscule !) soit la mieux maîtrisée par les candidats.

   (b) Ceux qui connaissent l'espérance de la loi de Poisson ont donné une valeur correcte pour $P(J' = 9)$.
   Quelques erreurs pour $P(J' \geqslant 1)$, en particulier mauvaise gestion du premier terme dans le développement en série entière de e^x.

   (c) Pour les 40% de candidats qui savent ce qu'est la fonction de répartition, on note 2 erreurs : $P(J' = 7) = P(J \leqslant 8) - P(J' \leqslant 7)$ et $P(X \geqslant 10) = 1 - P(J' \leqslant 10)$ ou $P(X \geqslant 10) = P(J' \leqslant 13) - P(J' \leqslant 9)$.

4. (a) Les valeurs sont (presque) toujours justes mais (quasiment) jamais justifiées et encore moins correctement.

   (b) Cette question n'a pas posé de problème aux candidats ayant respecté les consignes de l'énoncé.
   A noter que ces justifications devraient être données spontanément par les candidats sans qu'il soit nécessaire de les réclamer.

   (c) La formule des probabilités totales est relativement bien connue des candidats, par contre, le système complet d'événements fait souvent défaut.
   Quelques candidats ont essayé de justifier que $(A_n,\, B_n,\, C_n)$ est bien un système complet d'événements (ce n'était pas un attendu de la question)... rarement avec succès.

   (d) Cadeau de l'auteur du sujet aux candidats.

   (e) Quelques $G_{n+1} = 4AG_n$ ou $G_{n+1} = AG_n$ et quelques produits qui n'existent pas mais finalement 70% de bonnes réponses : $G_{n+1} = \dfrac{1}{4}AG_n$.

   (f) Un petit peu plus d'un candidat sur 3 a fait l'impasse sur cette question Python.
   Les candidats avaient l'entière liberté d'utiliser les résultats des questions (b) et (c) ou de la question (e) (voire même de la question g). Les candidats peu à l'aise avec le calcul matriciel avaient donc intéret à utiliser les questions (b) et (c).
   Quelques remarques :
   * Il n'était pas demandé d'écrire une fonction ;
   * Il était demandé b_{20} par b_n, ni G_n, ni G_{20}, ni a_{20}, ...
   * On note des confusions entre `range(n)`, `range(n+1)`, `range(n-1)`, `range(1,n)`...

   Ceci dit, de nombreux programme qui ne fonctionnent pas auraient facilement pu être corrigés si le candidat avait pu faire des tests.

   (g) On trouve beaucoup plus de produits qui n'existent pas qu'à la question (e), en particulier chez les candidats parlant de suites géométriques...

   (h) Dans cette question, quelques candidats ont calculé A^n en élevant tous les coefficients de A à la puissance n !
   D'autres ont fait tous les calculs avec a_0, b_0 et c_0 sans les remplacer par leurs valeurs (ou alors quand les calculs étaient finis)...

(i) Les limites ne sont que très rarement (correctement) justifiées. L'incohérence de leur valeur pas mise en évidence.
L'interprétation est souvent oubliée ou incorrecte.

5. (a) Un minimum de justification est attendu ! Comme dans toutes les questions (sauf indications contraires)

(b) Un petit tiers des candidats donne la bonne réponse.
On trouve également régulièrement $(T = n) = S_k$ sans précision sur k.

(c) La formule des probabilités composées semble bien peu connue des candidats. Certains préfèrent un bien peu précis « par indépendance » alors qu'il n'y a aucune ambiguïté dans l'énoncé sur le fait que p_n est défini comme une probabilité conditionnelle.
De nombreux candidats proposent $P(T = n) = \dfrac{1}{n+1}$ sans remarquer qu'il s'agit du terme général d'une série divergente.

(d) Beaucoup de candidats ont compris qu'il s'agissait de $P(T \leqslant 20)$ mais en l'absence de (bonne) réponse à la question précédente, ne sont pas allés plus loin.
Quelques erreurs dans le calcul de cette somme télescopique.

(e) Les candidats semblent d'accord sur le fait qu'il s'agisse d'une limite... par contre, nous avons l'embarras du choix quant à la suite considérée (qui n'est généralement pas justifiée par le candidat).
Quelques candidats n'ont pas lu ou compris la définition de l'événement $(T = 0)$.

(f) i. La série est souvent mal écrite à cause de son premier terme.
Le critère de d'Alembert est mal utilisé : il manque les valeurs absolues et même parfois la limite.

ii. Les changements d'indice et les termes manquant pour identifier $-\ln(1-x)$ ont souvent conduit à une réponse fausse.
Les candidats ayant tenté une double intégration se sont souvent perdus en chemin.

(g) Beaucoup de bêtises concernant la dérivabilité de G que cela soit en 0 ou en 1. De nombreux candidats disent que $G(1)$ n'existe pas (car on ne peut pas remplacer x par 1).
Il était beaucoup plus simple de s'intéresser à la série de terme général $nP(T = n)$.

MATHEMATIQUES B

Présentation générale :
Le sujet de cette année se composait d'une importante composante d'algèbre linéaire et bilinéaire et deux composantes plus modestes de géométrie : géométrie plane dans un cas, mélangeant coniques et probabilités ; géométrie dans l'espace dans l'autre cas.
Ces trois parties indépendantes étaient précédées de quelques questions de cours et on trouvait également dans le sujet de nombreuses questions consistant à appliquer directement un résultat du cours.

Le sujet bien qu'un peu trop long a parfaitement permis de classer les candidats.

Nous rappelons aux candidats que dans un sujet de géométrie, ils ne doivent pas hésiter à illustrer leurs réponses par un schéma.
Les candidats qui le font à bon escient sont récompensés.

Présentation des copies :
La présentation des copies reste toujours insuffisante cette année : écriture indéchiffrable ou minuscule, copies couvertes de ratures, résultats non encadrés, questions ou parties non numérotées, orthographe et règles de grammaire non respectées y compris lorsqu'il s'agit de recopier une phrase écrite dans l'énoncé...
Nous avons bien souvent l'impression de lire des brouillons et non des copies rédigées.

Il est rappelé aux candidats que leurs copies sont destinées à être lues et que des points sont prévus dans le barème pour la présentation des copies.
Cette année, moins d'un candidat sur quatre a obtenu les points de présentation.

Nous renvoyons aux rapports des années précédentes pour connaître les critères a respecter pour obtenir ces points.

On trouve heureusement aussi des copies, très agréables à lire, où on suit sans aucune difficulté le raisonnement et les calculs du candidats. Ces copies sont valorisées.

Rédaction :
Quelques conseils de rédaction que nous aimerions voir respectés :

• Les notations de l'énoncé doivent être respectées.

Si les candidats ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion.

• De même les consignes de l'énoncé doivent être respectées. Une réponse, même juste, qui ne respecte pas ces consignes ne peut pas être prise en compte.

• Tous les résultats doivent être justifiés. On trouve bien trop souvent des affirmations sans preuve.

Par ailleurs, quand un résultat est fourni par l'énoncé, il est impératif que le détail des calculs figure sur la copie afin de convaincre le correcteur qu'on ne cherche pas à l'arnaquer.
Ces tentatives d'arnaque indisposent les correcteurs et sont sanctionnées.

• Les correcteurs apprécient que le candidat annonce quel est son objectif et encore plus que le candidat à l'issue de ses calculs, termine la question par une conclusion (qu'il encadre).

• Les candidats doivent réfléchir à la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent. ainsi, cela leur évitera de dériver une courbe ou d'écrire des égalités entre des objets de différentes natures.

• Dans une épreuve de géométrie, il est souhaitable que les vecteurs soient écrits avec une flèche.

De plus, on remarque que de nombreux candidats utilisent le signe ≪ $\Leftrightarrow$ ≫ sans en comprendre la signification. De même des questions en ≪ si ... alors ... ≫ sont régulièrement traitée à l'envers ou à l'aide de ≪ si et seulement si ≫.
Enfin, concernant les produits de matrices, il est demandé que les 3 matrices A, B et AB soient écrites sur la même ligne, les unes derrières les autres, avec la présence d'un signe ≪ = ≫ à l'endroit opportun. Toute autre écriture doit être utilisée au brouillon.

D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Avant de passer à ce détail, on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre et que, comme indiqué sur le sujet, la feuille de papier millimétré doit être rendue avec la copie.

Quelques questions de cours.

S'agissant de questions de cours, aucune démonstration n'était demandée ou attendue. Celles qui ont parfois été proposées sont souvent incomplètes ou fausse.
9 éléments étaient demandés dans ces questions que cours, la répartition des candidats en fonction du nombre d'éléments corrects fournis est la suivante :

Nb éléments	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fréquence (en %)	6.7	7.3	9.5	10.5	10.1	11.9	11.9	13.6	11.1	7.5

Soit en moyenne, moins de 5 éléments corrects.

1. 75% des candidats répondent correctement à cette question.
2. 55.9% des candidats donnent correctement les 2 éléments, 17.1% aucun.
3. (a) 45% des candidats donnent correctement les 2 éléments, 33.2% aucun.
   (b) 35.4% des candidats donnent correctement les 2 éléments, 49.3% aucun.
4. 21.8% des candidats donnent correctement les 2 éléments, 53.3% aucun.

Première Partie.

1. (a) Les candidats utilisant la caractérisation des sous-espaces vectoriels oublient régulièrement de préciser de quel espace vectoriel.
   La base est souvent donnée sans justification, en particulier la liberté de la famille (I, J, K) est peu mentionnée. Quand elle est justifiée, c'est souvent par un ≪ vecteurs non colinéaires ≫.
   Des confusions entre ≪ rang ≫, ≪ dimension ≫ et ≪ cardinal ≫.
   (b) La base proposée est souvent correcte mais mieux ne vaut pas être trop regardant sur la justification... quand il y en a une.
2. (a) Globalement, la définition d'un produit scalaire est bien connue MAIS :
   Les candidats oublient trop souvent de mentionner que φ est à valeur dans $\mathbb{R}$ (est une ≪ forme ≫)
   φ n'est pas linéaire (elle l'est à gauche ou par rapport à sa première

variable, par exemple)

On note des tentatives d'arnaque en particulier dans la symétrie et/ou le caractère non dégénéré.

Des candidats ont mal lu l'énoncé et travaillent sur E et non sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Des confusions sont remarquées entre linéarité et distributivité

On ne peut pas avoir en même temps : « $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \varphi(M, M) > 0$ » et « $\varphi(M, M) = 0 \Leftrightarrow M = 0$ ».

On trouve : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A) \times \mathrm{tr}(B)$, $\varphi(M, M) = \mathrm{tr}(M^2) \geqslant 0$ et même $M^2 \geqslant 0$!

(b) A l'exception de quelques candidats qui veulent démontrer que les matrices I et $J + K$ sont des matrices orthogonales, les candidats savent ce qu'ils doivent établir et y arrivent sauf que...
...un nombre conséquent de candidats effectue explicitement le produit $I \times (I + J)$ et régulièrement trouve que ce produit est la matrice nulle !

(c) Les formules et/ou méthodes sont trop peu connues.

(d) Rares sont les candidats qui font le lien avec la question précédente. Beaucoup se contentent de normer les vecteurs I, J et K sans même vérifier ou mentionner qu'ils sont bien deux à deux orthogonaux.
Les deux termes de « minimum » et « supplémentaires » utilisés par l'énoncé sont ignorés par les candidats.

(e) Très peu traité. Certains candidats exhibent un ensemble et se contentent de vérifier qu'il convient. Les correcteurs préféraient lire le raisonnement qui a permis de trouver cet ensemble.

3. Cette question massivement abordée par les candidats est ratée...

   (a) Un candidat sur trois parvient à donner une réponse correcte.
   Pour les autres :

   Le discriminant (et non le déterminant) est faux, faute de savoir développer $-4(a^2 - bc)$.

   Les formules donnant les racines sont inexactes.

   Des confusions entre a, b et c de $M(a, b, c)$ et $aX^2 + bX + c$.

   Des candidats ne mènent pas la discussion demandée par l'énoncé ou discutent suivant le signe de α.

   Le cas $bc = 0$ est souvent oublié, voire même exclus (puisque $(b, c) \neq (0, 0)$), ce qui n'empêche pas ces candidats de (mal) traiter la question (c).

   (b) Les réponses sont souvent incomplètes (2 cas sur les 4 possibles sont évoqués) et rarement justifiées ou justifiées correctement.
   Les correcteurs ne comptent plus les « le polynôme caractéristique est scindé (où ?) donc la matrice est diagonalisable » et les « toutes les matrices sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ » !

   (c) Aux arguments précédents, on peut rajouter « la matrice possède une valeur propre double donc n'est pas diagonalisable » ainsi que de nombreux sous-espaces propres qui sont réduit à 0 ou qui contiennent des matrices.

4. Entre les candidats qui ne connaissent pas la question de cours 4., ceux qui ne font pas le lien avec cette question de cours et ceux qui ont mal lu l'énoncé (on demandait les isométries qui sont dans $\mathcal{E}$, pas celles de $\mathbb{R}^2$)... il ne reste plus grand monde.

5. (a) Là aussi, on note une mauvaise lecture de l'énoncé avec des candidats qui cherchent à résoudre l'équation $M^2 = M$.
   On note quelques confusions avec les matrices de symétrie dans une base adaptée.
   Un candidat sur quatre donne une réponse correcte.
   (b) Les candidats (qui ont correctement répondu à la question précédente) ont souvent trouvé la forme de la matrice mais ont oublié d'étudier la réciproque.
   (c) Très peu traitée.
   Des candidats ont déterminé les sous-espaces propres et n'ont pas vérifié que ceux-ci étaient orthogonaux.
   D'autres pensent à tort que la matrice d'une projection orthogonale est une matrice orthogonale.
6. Les démonstrations sont peu convaincantes. Rares sont les candidats qui donnent un contre-exemple.
7. (a) On lit trop souvent $kM_0^2 \in \Delta \Leftrightarrow M_0^2 \in \Delta$.
   Nombre de candidats proposent la même démonstration pour « $\Leftarrow$ » et « $\Rightarrow$ » et il n'y a pas toujours les 2 sens.
   (b) i. Pas de problème pour ceux ayant lu correctement la question. D'autres essayent de résoudre l'équation $M_0^2 = \lambda M_0$ (dont on ne sait pas qu'elle est l'inconnue).
   ii. Il y a ceux qui ne comprennent pas le « si ... alors » et qui vérifient que J^2 et K^2 sont nuls.
   Les autres posent le système. Sa résolution arrive au résultat demandé sans qu'il soit toujours facile de suivre la démarche qui permet d'y arriver. On voit régulièrement $a^2 + bc = 0 \Leftrightarrow a^2 = bc = 0$.
   iii. Pas de problème pour les candidats (pas assez nombreux) qui connaissent la caractérisation des projecteurs à l'aide du carré de leur matrice.
   (c) Il s'agissait de faire la synthèse, avec étude de la réciproque, des questions précédentes. Peu de candidats s'en sont révélés capables.
8. (a) Il y a les candidats qui ont uniquement vérifié que le produit $I \times J$ est encore dans le plan et ceux (influencés par la question précédente ?) qui ont uniquement vérifié que $(aI + bJ)^2$ est encore dans le plan... mais malgré tout un petit quart de démonstrations correctes.
   (b) Voir la question 6. mais en encore moins convainquant pour ne pas dire faux.
   (c) La stabilité est un peu mieux réussi qu'à la question (a) mais de nombreux candidats ont oublié de justifier que l'ensemble proposé est bien un plan.
   (d) Voir (a).
   (e) Une petite trentaine de candidats ont proposé un début de démonstration plus ou moins avancée. Aucun n'est arrivé au bout.

Deuxième Partie.

1. (a) Tout d'abord, il serait souhaitable que les candidats respectent l'orthographe de « théorème spectral » et de « ellipse ».
   La majorité des candidats connaissent le principe d'étude d'une conique et on reconnu une ellipse. Malheureusement, peu (10%) sont arrivés au bout sans

erreur.
Les principaux problèmes rencontrés sont :

Une matrice P non orthogonale ;

Des erreurs de calculs (les candidats devraient prendre le temps et la place de les mener) ;

Un centre dont les coordonnées n'ont pas été données dans le repère demandé ;

La difficulté pour les correcteurs de trouver dans quel repère les équations et coordonnées sont données ;

Des sommets en nombre insuffisant.

Les réponses ont rarement été mises en évidence, les correcteurs ont souvent eu du mal à les trouver !

(b) La bonne nouvelle, c'est que nombreux ont été les candidats qui se sont lancés (avec plus ou moins de succès) dans le tracé.
Les éléments cherchés par les correcteurs sont :

Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ avec la bonne longueur ;

Les vecteurs ≪ de la nouvelle base ≫ et le centre de l'ellipse ;

Les 4 sommets avec un tracé pas ≪ pointu ≫ au niveau de ces sommets ;

Le dessin est dans la feuille (ce qui nécessite une réflexion pour placer l'origine du repère... mieux valait commencer par placer le centre de la conique)

2. Des candidats essayent de discuter les cas a priori et finissent par en oublier.
La discussion sur le signe de $a^2 - b^2$ s'est souvent terminée (soit dans cette question, soit dans la question suivante) en une discussion sur le signe de $a - b$.

3. (a) Le calcul est souvent réussi mais les candidats ne sont pas suffisamment nombreux à justifier spontanément la convergence de la série.
Et, hélas, cette justification se résume souvent à $(1 - p_A)(1 - p_B) < 1$, ce qui n'est pas suffisant.

(b) Un candidat sur 5 a fait le lien avec l'univers-image d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

(c) De nombreuses bêtises sur les probabilités et les variables aléatoires : A et B sont des événements indépendants, $P(A = k) \cap P(B = k)$; $P((A \cap B) = k)$,...
De plus les correcteurs souhaiteraient que les vagues ≪ par indépendance ≫ soient remplacés par un ≪ car les variables aléatoires A et B sont indépendantes ≫ et que la somme soit justifiée à l'aide d'un système complet d'événements.

(d) Pas de problème pour les candidats connaissant les probabilités associées à la loi géométrique.

(e) Idem. Les explications concernant un nombre d'échec sont souvent vaseuses.

(f) L'étape intermédiaire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(A = k)P(B > k)$ a souvent été produite, mais trop peu justifiée, pour ceux ayant établi le résultat.

(g) On a souvent des arguments de la forme ≪ si $A < B$ alors $\mathcal{C}_{a,b}$ est une hyperbole ≫, ce qui ne permet pas de justifier l'égalité $P(A < B) = P(X = -1)$.
La valeur de $P(X = 1)$ (avec parfois des erreurs de calculs) est bien justifiée.

(h) Pas de soucis pour les candidats ayant répondu aux questions précédentes

Troisième Partie.

1. (a) Cette question que l'on retrouve très régulièrement dans les sujets de Mathématiques B est toujours aussi peu ou aussi mal traitée.
   Pour ceux qui parviennent au bout, la rédaction laisse encore à désirer.
   (b) Quelques tentatives d'arnaque, des gradients qui ne sont pas des gradients. La méthode semble toutefois bien connue.
   Attention toutefois aux « et » et aux « ou » avec le signe « $\neq$ ».
   (c) Comme tous les ans, il y a les plans qui ne sont pas des plans, les plans qui passent par O et pas par A et de nombreuses erreurs de calculs.
   Par ailleurs, une simplification par 2 ou mieux $2\sqrt{2}$ aurait été appréciée.

   (a) Quelques tentatives d'arnaques mais la question est plutôt bien traitée quoique pas souvent bien rédigée.
   (b) Très peu réussie. Des candidats ont bien cherché à établir une représentation paramétrique de droite mais n'ont pas su par quel point la faire passer.
   (c) L'argument « les cylindres (ou les cônes) sont des surfaces réglées développables » bien que juste n'est pas recevable car ne figurent plus au programme depuis le concours 2015 (tout comme les ellipsoïdes et paraboloïdes cités par quelques candidats dans la question 1).

2. (a) Voir 2.(a) mais avec beaucoup plus de tentatives d'escroquerie.
   (b) Voir 2.(b)
   (c) La plupart des candidats se contentent de mettre au même dénominateur et de supprimer celui-ci sans justification.
   D'autres vérifient uniquement que le point Ω vérifie l'équation donnée.
   (d) Relativement bien traitée. Attention toutefois aux articles « un » et « le ».
   (e) Voir 2.(c)

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Le sujet de cette année avait, cette fois-ci, pour fil directeur la très classique, mais non moins très riche, sur le plan mathématique, fonction *tangente*. Après un préambule consacré à ses principales propriétés (domaine de définition, variations, existence de sa bijection réciproque *arctangente*), le problème faisait intervenir des intégrales généralisées, pour lesquelles la fonction tangente permet soit d'obtenir leur convergence, soit de les calculer. La fonction tangente vérifiant aussi une équation différentielle, il était également demandé aux candidats d'obtenir les premiers termes de son développement en série entière, où interviennent les nombres de Bernoulli.

Cette épreuve a été mieux réussie que l'année précédente, où l'on sentait l'impact du confinement de Mars 2020 et l'arrêt des cours en présence. La grande majorité des candidats a traité le Préambule, le I., une partie de III. et IV. La partie II .requérait la connaissance du produit de Cauchy, qui semble ignorée de la part de certains candidats. D'autres ont visiblement cherché à « arranger » leurs résultats, pour obtenir des expressions approchant celles qui étaient données en fin de problème. C'est hélas une mauvaise démarche.

L'intégralité du sujet a été traitée dans de très bonnes copies, qui ont donc obtenu la note maximale de vingt sur vingt. A côté, il reste toujours de très faibles copies, où même la fonction tangente ne semble pas connue (confusion avec les fonctions sinus ou cosinus, ou variantes très exotiques sans aucun rapport).

Comme les années précédentes, nous évoquons la bienveillance des correcteurs : il est fréquent d'accorder le point car le raisonnement semble correct malgré une erreur ou un problème logique. Néanmoins, nous rappelons qu'il ne faut pas non plus en abuser, dès lors que la correction devient, pour le correcteur, une épreuve de DECHIFFRAGE, doublée d'un parcours d'étapes - jeu de piste, où les questions ne sont plus traitées dans un ordre logique. Il faut éviter de naviguer entre les questions, entre les parties. Prévoir une copie par partie afin de combler les éventuelles lacunes a posteriori. L'organisation des réponses fait partie de la présentation de la copie, qui est évaluée.

L'usage d'abréviations, ou d'acronymes abscons est à proscrire : « CVA », « CIFS », « LBSDLBS », etc... ne sont pas des abréviations usuelles. Il faut aussi faire attention à l'orthographe, en particulier celle des noms propres (Riemann s'écrit avec un « R » majuscule, et prend deux « n »). La connaissance du programme passe aussi par l'apprentissage des noms des théorèmes.

D'autre part, écrire en petit un calcul faux ne le rend pas juste. Écrire l'une sur l'autre deux réponses différentes, suggérant ainsi au correcteur de choisir la bonne réponse, n'est pas non plus une bonne stratégie.

Les correcteurs rappellent qu'il faut bien lire l'énoncé : des points sont bêtement perdus par l'oubli d'une question, des réponses hors sujet... Soigner la rédaction, utiliser les bons connecteurs logiques (éviter les phrases du type : « la suite est décroissante et minorée alors elle converge »).

En ce qui concerne la présentation, si elle est globalement convenable, elle n'est pas toujours excessivement soignée non plus. Nous rappelons que les traits se tirent à la règle.

Remarques particulières

Préambule

1. Les correcteurs ont noté beaucoup d'erreurs sur le domaine de définition de la fonction tangente : « $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ », « $\mathbb{R}$ », ou encore « $\mathbb{R} \setminus k\,\pi, \pi \in \mathbb{N}$ », voire « $\mathbb{R} \setminus k\,\pi, \pi \in \mathbb{R}$ » sont souvent proposés. Il semble aussi que certains candidats confondent le domaine d'arrivée ($\mathbb{R}$), et celui de départ.

   Attention à l'orthographe de *tangente* qui n'est pas « tangeante ».

   Enfin, dire que « $\tan(-x) = -\tan(x)$ » ne suffit pas : il faut conclure en disant que la fonction est impaire. Par ailleurs, une fonction n'est jamais « impair ».

2. Une question de cours était très explicitement posée ici. On attendait que les candidats énoncent le théorème de la bijection, puis l'appliquent, pour montrer que la fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Le théorème est pourtant rarement cité. Certains candidats mentionnent le théorème des valeurs intermédiaires.

   Lorsque le théorème est cité, l'une des deux hypothèses est souvent oubliée (continuité ou stricte monotonie).

D'autre part, le fait que la fonction tangente soit à valeurs dans $\mathbb{R}$ ne suffit pas, il faut préciser que l'image de la fonction est bien $\mathbb{R}$, en étudiant les limites aux bornes par exemple.

Une quantité non négligeable de copies étudie le « noyau »de la fonction tangente, en précisant que sa « dimension » est nulle ...

En ce qui concerne la dérivée de la fonction arctangente, elle apparaît comme bien connue.

3. Il s'agissait, dans cette question, de faire le lien entre les variations de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et celles de sa réciproque arctangente, puis de retrouver ce résultat à l'aide de la dérivée de la fonction arctangente obtenue à la question précédente.

   Ce lien est rarement bien exprimé. D'autre part, un tableau de variation n'est pas suffisant pour répondre à la question. Il faut un minimum de rédaction autour ...

4. On demandait, ici, de tracer, sur un même graphe, les courbes représentatives de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$, en rappelant comment le tracé de la courbe représentative de la fonction arctangente se déduit de celui de la fonction tangente.

   Certains candidats ne respectent pas l'échelle demandée. D'autres se contentent d'un schéma approximatif dans le corps de la copie, alors que du papier millimétré est fourni. D'autre part, les deux courbes se coupent trop souvent en trois points.

   Il faut aussi préciser quelle courbe correspond à quelle fonction.

   Enfin, une asymptote n'est pas la fonction : les courbes se finissent parfois par des droites ...

   En ce qui concerne la symétrie par rapport à la première bissectrice, elle n'est pas toujours précisée. Nous rappelons également que si la symétrie par rapport à la première bissectrice est évoquée, il est judicieux de la représenter sur le graphique. Les correcteurs ont trouvé d'autres variantes exotiques : rotations de $\frac{\pi}{4}$, « retournements de courbe », « inversion d'axes » (ce qui ne correspond pas à une transformation géométrique), etc ...

   Il faut aussi bien lire l'énoncé : il était demandé de réaliser les deux courbes dans un même repère.

Enfin, nous rappelons qu'il ne faut pas confondre la fonction avec sa courbe représentative (le symétrique d'une fonction n'existe pas).

5. La majorité des candidats a réussi à montrer que, pour tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$,

$$1 + \frac{1}{\tan^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$$

Partie I

1. (a) Cette première question demandait d'étudier, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale à paramètre $F(x)$. Beaucoup de candidats ont eu recours, de façon abusive, au théorème de continuité des intégrales à paramètres, qui n'était absolument pas nécessaire (d'où l'importance de bien lire la question).

   Si la plupart des candidats écrivent que, lorsque le réel t tend vers l'infini,

   $$\frac{1}{1+x^2+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$$

   tous ne concluent pas correctement à la convergence de l'intégrale donnée. Certains se contentent de dire que « par Riemann, cela converge », sans préciser où ! Parfois, on trouve « $\int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ », ce qui laisse une très forte ambiguïté, quand, en même temps, de nombreux candidats écrivent que « $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge ». Ou alors, ils se contentent d'écrire que « $\frac{1}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente ».

   (b) Le calcul de $F(0)$ a été bien effectué dans l'ensemble. Quelques candidats écrivent « $\lim\limits_{X\to+\infty} [\arctan t]_{-X}^{X}$ ».

   Pour beaucoup d'autres : « $\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = 0$ ». Ce résultat aurait pourtant dû déclencher un signal d'alarme : la fonction intégrée est strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$. Son intégrale ne peut donc pas être nulle...

   (c) L'expression, pour tout réel x, de $F(x)$ en fonction de x, n'a pas toujours été donnée par les candidats. Certains ont voulu appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, sans que cela conduise à quoi que ce soit.

2. (a) Il s'agissait, ici, de donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel α pour que la série $\sum \dfrac{\pi}{\sqrt{1+(n\,\pi)^{\alpha}}}$ converge.

Beaucoup de candidats répondent « $\alpha > 2$ » sans aucune justification. D'autres réutilisent la lettre α pour citer le résultat du cours sur les séries de Riemann, rendant leur réponse difficilement compréhensible.

Beaucoup (trop) de copies assurent que « $\sum u_n$ converge si, et seulement si, (u_n) tend vers 0 ».

Enfin, de nombreux candidats perdent du temps à étudier le cas où le réel α est négatif, montrant leur lecture inattentive du sujet.

Certains candidats ont voulu utiliser le critère de d'Alembert, qui apparaît comme mal maîtrisé, et n'était pas du tout adapté à cette question.

(b) Pour montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_{n+1} \leq J_n \leq I_n$$

beaucoup de candidats ont voulu recourir à des arnaques, ou des affirmations absolument injustifiées (comme quoi la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^{\alpha}\,\sin^2 t}$ serait décroissante ...)

Les justifications sont souvent absentes dans les inégalités entre intégrandes (fonction inverse strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^{\star}$ ...)

Des symboles comme $\Leftrightarrow$ sont utilisés à tort, par exemple en intégrant.

Enfin, la justification du passage sur $[0,\pi]$ est souvent omise, le candidat se contentant de conclure comme s'il n'y avait pas de problème.

(c) A l'aide du changement de variable $\dfrac{1}{\tan t} = u$, il fallait montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n = F\left(n^{\frac{\alpha}{2}}\,\pi^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Cette question a été plutôt bien traitée, même si certains candidats concluent trop rapidement, alors que le résultat est donné dans l'énoncé. Le changement de variable est rarement bien justifié.

Nous signalons que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\tan t}$ n'est pas définie pour $t = \dfrac{\pi}{2}$. D'autre part, beaucoup trop de copies assurent, sans aucune vérification, que le changement de variables est de classe C^1 et strictement monotone.

D'autres essayent d'obtenir le résultat demandé à l'aide de tours de passe-passe (nous rappelons que si le correcteur ne comprend pas, il ne pourra pas mettre les points : l'essence des mathématiques, c'est quand même la preuve ...), quand ils n'adaptent pas leur réponse à ce qui est attendu, sans vérifier la cohérence de ce qu'ils écrivent : non, lorsque le réel t tend vers zéro, $t \mapsto \dfrac{1}{\tan t}$ ne tend pas vers moins l'infini.

(d) Cette question a été bien traitée par les candidats ayant trouvé l'expression de $F(x)$.

(e) Il fallait, ici, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel α pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$ converge.

Pour cette question, sans doute l'une des plus difficiles du sujet, nous avons (encore) trouvé quelques tentatives « d'arnaque » du correcteur : « $\alpha > 1$ car ce sont des intégrales de Riemann », par exemple).

Les candidats ayant traité la question ont vu le lien avec la série de terme général u_n. Très peu de copies précisent que la convergence de la suite $\displaystyle\int_0^{n\pi} f(t)\,dt$ ne suffit pas à conclure à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

Partie II

1. (a) Très peu de candidats connaissent le produit de Cauchy : les correcteurs ont vu tout et n'importe quoi ...

Nous rappelons qu'il faut faire attention à bien se relire : « $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_n\, b_{n-k}$ », est peut-être une erreur d'inattention, mais est sanctionné.

De même, pour le rayon de convergence, qui semble très peu connu des candidats.

Certains candidats ont visiblement retrouvé le résultat, à l'aide du produit de Cauchy pour les séries numériques : les correcteurs ont trouvé, à de nombreuses reprises, des expressions de la forme « $f(x)\,g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\, x^k\, x^{n-k}$ », ce qui est juste bien sûr, il est juste dommage que les candidats ne pensent pas à simplifier le produit $x^k\, x^{n-k}$.

Nous signalons un problème de lecture de l'énoncé : les notations et les informations données dans le texte ne sont pas respectées (réutilisation de R pour le rayon de la série produit).

Enfin, nous avons aussi trouvé beaucoup de tentatives d'escroquerie dans cette question : des candidats ayant vu ce qui figurait à la fin du sujet font apparaître des soi-disant produits de Cauchy avec des expressions de la forme
« $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_n\, b_{n-k}$ », « $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n\, b_{n-k}$ », ou encore « $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_n\, b_{n-k}$ », etc ...

(b) Cette question, où l'on demandait d'exprimer, pour tout réel x de $]-R, R[$, le développement en série entière de $(f(x))^2$, a été bien traitée par la majorité des candidats ayant bien répondu à la question précédente. Pour les autres, nous avons encore trouvé des expressions très exotiques, de la forme
« $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2\, x^n$ », « $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2\, x^{2\,n}$ », etc ..

2. (a) On demandait, ici, de donner la relation de récurrence vérifiée, pour tout entier naturel n, par les coefficients a_n.

Cette question a été bien traitée par une partie seulement des candidats ayant bien répondu à la question précédente. Beaucoup de candidats n'ont pas pensé à utiliser l'unicité du développement en série entière, et donc ne donnent pas la relation de récurrence. Certains parlent de « polynômes », et non de séries. Certains encore ne semblent pas voir compris ce qui est manipulé, les correcteurs ont trouvé des relations de la forme « $(n+1)\, a_{n+1} = 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}$ », etc ..

(b) On attendait, dans cette question de démontrer, par récurrence forte, que, pour tout entier naturel p :

$$a_{2\,p} = 0$$

La récurrence est souvent mal rédigée. Par contre, la conclusion sur l'imparité de la fonction f est souvent bien mentionnée.

(c) Ici, la valeur de $f'(0)$ a souvent été calculée à partie de l'équation différentielle.

En revanche, les coefficients a_1, a_3, a_5, a_7 n'ont été que très peu calculés correctement. En particulier, de nombreux candidats refusent de calculer 45×7.

Un nombre non négligeable de candidats obtiennent, de façon « magique », les bonnes valeurs de ces coefficients, en contradiction complète avec les formules fausses qu'ils ont obtenues auparavant.

Il y a, aussi, et à nouveau un problème de lecture de l'énoncé : beaucoup de candidats peinent à justifier le fait que $f(0) = 0$, alors que cela figure quelques lignes plus haut.

(d) Il s'agissait ici de faire le lien entre les résultats précédents, et le développement limité, à l'ordre 7, au voisinage de zéro, de la fonction tangente, au même ordre, en zéro.

Très peu de candidats ont expliqué pourquoi le développement en série entière donne le développement limité en 0 (qui est une notion locale).

Certains candidats ont bien noté que la fonction tangente vérifiait l'équation différentielle, mais ont oublié de préciser que $\tan(0) = 0$.

D'autres ont conclu à l'égalité entre la fonction f et la fonction tangente à l'aide du théorème de Cauchy du cours, alors qu'il ne s'applique pas dans ce cas.

Certains enfin n'ont absolument pas vu le lien avec les questions précédentes, et se sont contentés de calculer le développement limité de la fonction tangente, en zéro.

Partie III

1. (a) On demandait, ici, d'étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale $H_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{2\,n}}{1+u^{4\,n}}\,du$.

Cette question a été globalement bien traitée, même si les correcteurs ont retrouvé le même type d'erreurs ou d'imprécisions qu'à la première question de la Partie I : « par Riemann, cela converge », sans préciser où, ou alors, « $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{du}{u^{2\,n}}$ converge », ce qui laisse une très forte ambiguïté, quand, en même temps, de nombreux candidats écrivent encore que « $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{2\,n}}$ converge », ou se contentent d'écrire que « $\dfrac{1}{u^{2n}}$ est une intégrale de Riemann convergente ».

Nous avons aussi noté de grosses erreurs (règles de calcul sur les puissances), comme : « $\dfrac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \sim \dfrac{u^{2n}}{u^{4n}} = \dfrac{1}{u^2}$ ».

Il y a aussi, souvent, une étude inutile en 0 (la fonction y est continue), ou une conclusion trop rapide : il faut préciser que $2n > 1$.

Enfin, conclure que « H_n converge si, et seulement si $n > \dfrac{1}{2}$ » montre une lecture trop hâtive de l'énoncé : le candidat n'utilise pas le fait que n est un entier naturel non nul.

Certains candidats n'ont visiblement pas du tout compris la question, ils ont voulu étudier la convergence de la série de terme général H_n.

(b) Dans cette question, plutôt facile, on demandait de calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u^{2n}\, du$.

Si cette question a été globalement bien traitée, certains candidats semblent ignorer que $1^{2n+1} = 1$. D'autres font des erreurs au niveau du calcul de l'intégrale, en écrivant par exemple « $\displaystyle\int_0^1 u^{2n}\, du = \left[\frac{u^{2n+2}}{2n+2}\right]$ », etc ...

(c) Très peu de candidats ont su calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}\, du$.

Beaucoup ont voulu passer à la limite sous le signe intégral, ce qui n'est pas possible dans le cadre du programme.

(d) Pour déduire des questions précédentes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = 0$, encore fallait-il avoir traité celles-ci ... Le recopiage/exploitation de l'énoncé ne suffisait pas.

2. (a) La réponse attendue dans cette question, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt[2n]{x} = 0$, a est souvent été donnée sans preuve. Il fallait, au moins, préciser que $\dfrac{1}{2n} > 0$ ou, mieux, repasser à la forme exponentielle, et mentionner la composition de limites. En redéfinissant la racine $n^{ième}$ sous cette forme, on attendait, bien sûr, de redémontrer ce résultat de cours.

(b) Les candidats ont souvent bien utilisé la question précédente pour étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[2n]{\tan x}\, dx$.

Par contre, des erreurs montrent le manque d'habitude dans le traitement d'intégrales impropres avec des bornes qui ne sont pas infinies.

Signalons que l'intégrale L_n, pour n dans $\mathbb{N}^\star$, ne pouvait pas diverger, puisque les questions suivantes demandaient d'étudier la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$. C'est là encore un problème de lecture d'énoncé.

(c) Dans cette question, on demandait de montrer que la suite $(K_n)_{n, \in \mathbb{N}^\star}$ était croissante et majorée.

Les correcteurs ont trouvé de (très) nombreuses tentatives d'arnaque, notamment, sur les variations de la suite des intégrandes. Il fallait repasser à la forme exponentielle et préciser que l'appartenance de x à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ implique $\tan(x) \in [0, 1]$, et donc $\ln \tan(x) \leq 0$, ou, au moins discuter du fait que $\tan(x) \in [0, 1]$.

Mentionnons aussi des ≪ dérivées de suites ≫.

Certains candidats écrivent que ≪ (K_n) est croissante, de plus on a montré en 2 (b) que K_n converge, donc (K_n) est majorée ≫. Ceci montre une confusion grave entre la notion de convergence de suites et celle de convergence d'intégrales. Il y a aussi eu beaucoup de confusions entre les variations de la fonction tangente et celles de la suite d'intégrales, certains candidats écrivant que ≪ *tan* est croissante donc (K_n) est croissante ≫).

Des dizaines de copies ont assuré qu'un quotient d'intégrales est égal à l'intégrale du quotient des intégrandes, quand d'autres donnent un résultat équivalent sur les produits.

Un petit nombre de candidats a, visiblement, une très bonne compréhension ≪ intuitive ≫, et essayent de démontrer ≪ avec les mains ≫ le résultat. C'est une bonne démarche, mais elle ne remplacera jamais un vrai raisonnement mathématique ...

(d) Concernant l'étude du sens de variation de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$, nous faisons des remarques similaires à celles de la question précédente.

(e) Beaucoup de candidats ont bien montré la minoration demandée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star : \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x}\, dx \geq \frac{\pi}{4}$$

Par contre, les correcteurs ont quand même trouvé de nombreuses réponses fantaisistes ...

(f) La convergence de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ a généralement été plutôt bien traitée. Quelques candidats ont affirmé que la limite était égale à $\dfrac{\pi}{4}$.

Par contre, très peu de candidats justifient la convergence de la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$, et écrivent donc, sans justification, l'égalité « $\lim\limits_{n \to +\infty} (L_n + K_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} L_n + \lim\limits_{n \to +\infty} K_n$ ».

3. (a) On demandait ici, pour tout entier naturel non nul n, d'effectuer, en le justifiant, le changement de variable $\tan x = u^{2\,n}$ dans l'intégrale $(K_n + L_n)$. Le but était d'obtenir la relation

$$K_n + L_n = 2\,n\,H_n$$

Alors que l'énoncé le demandait explicitement, peu de candidats ont justifié le changement de variables. En particulier, la fonction tangente n'est pas de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$! La justification du caractère C^1 bijectif du changement de variables n'a quasiment jamais été bien traitée.

(b) On demandait ici de déduire des questions précédentes l'existence d'une constante réelle H telle que, lorsque n tend vers l'infini :

$$H_n \sim \frac{H}{n}$$

Cette question a été bien traitéé par les candidats ayant bien répondu à la - précédente. Peu de copies ont précisé que $H \neq 0$ et que l'on peut donc écrire l'équivalent.

Partie IV

1. La majorité des candidats ont démontré que la fonction ϕ est prolongeable par continuité en zéro.

2. La majorité des candidats a donné la bonne valeur du coefficient B_0. Par contre, il manque souvent les justifications !

3. Les candidats connaissant le produit de Cauchy ont plutôt bien traité cette question, malgré de nombreuses tentatives d'escroquerie du correcteur concernant le fait que la somme commence à 1. Ce ne sont pas des démarches payantes en termes de points.

4. (a) Pour montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

peu de candidats ont mentionné l'unicité du développement en série entière. Certains parlent d'unicité dans les polynômes. Les correcteurs ont aussi trouvé des argumentations complètements fausses – par exemple, une évaluation en zéro, sauf que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{0^n}{n\,!} = 0$$

ce qui ne permet donc pas de conclure à la nullité de chacun des coefficients $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k$.

Par contre, la seconde partie a souvent été bien traitée.

(b) Très peu de candidats ont correctement calculé $2\,B_2$ et $4\,B_4$.