

# Rapport – Mathématiques A

## Remarques générales

Le sujet comprenait deux exercices. L'exercice 1 portait sur les matrices unipotentes et faisait intervenir des méthodes classiques d'algèbre linéaire avec notamment de nombreuses notions de première année de classe préparatoire. L'exercice 2 portait sur des probabilités discrètes et couvrait largement le programme de probabilité des deux années.

Cette épreuve a globalement été bien traitée. Certains candidats ont correctement traité toutes les questions et obtenu la note maximale. Le premier exercice a été bien réussi par la majorité des candidats. Nous avons cependant constaté des lacunes sur certaines notions élémentaires, comme la définition d'un sous-espace vectoriel : rappelons que le programme des concours porte sur les deux années de classes préparatoires. Le deuxième exercice a été réussi par la majorité des candidats. Nous notons cependant un nombre important de candidats semblant avoir fait l'impasse sur les probabilités : l'exercice n'étant pas ou peu traité, les notions élémentaires du secondaire comme la loi binomiale n'étant pas vues.

Comme chaque année, nous insistons sur la présentation des copies : les résultats doivent être encadrés, les ratures évitées et les calculs non aboutis correctement barrés. Il en est de même pour la rédaction : les calculs doivent être justifiés, en particulier lorsque le résultat demandé est donné dans l'énoncé.

Il est demandé une expression et une orthographe correctes : une réponse ne devrait pas commencer par "Non, ce n'est pas un sous-espace vectoriel". On retrouve les erreurs fréquentes "lancé", "il réussis", "la pièce noir", "parmis", "le therme générale", "on conclue", "sous-espace vectorielle", "la matrice nul"... Il est demandé aux candidats de se relire et de faire un minimum d'effort : nombre de ces mots sont correctement orthographiés dans le sujet.

Un effort a été noté pour que les correcteurs distinguent bien  $N$  et  $\mathcal{N}$ .

L'usage des parenthèses est parfois mal maîtrisé : certains candidats écrivent par exemple  $\frac{n-1}{n} \times n - 1$  au lieu de  $\frac{n-1}{n} \times (n - 1)$  (idem dans le calcul du polynôme caractéristique). Ce n'est pas au correcteur de deviner s'il doit y avoir une parenthèse. De même, on ne devrait pas voir  $\frac{1}{x} \times -\ln(1 - x)$  mais  $\frac{1}{x} \times (-\ln(1 - x))$  ou  $-\frac{1}{x} \times \ln(1 - x)$ .

Enfin, nous avons vu des confusions sur les signes entre  $=$ ,  $\sim$ ,  $\Leftrightarrow$ . Il convient de réfléchir à la nature des objets manipulés.

## Remarques particulières

### Exercice 1

- (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Les opérations effectuées sur les lignes ou colonnes sont souvent omises. La règle de Sarrus n'est pas acceptée (elle n'est pas au programme). La réponse  $\text{Sp}(A) = \{1, 1, 1\}$  a été souvent donnée ou alors les valeurs propres sont  $\{1\}$ . La notation  $\{1_{(3)}\}$  bien que compréhensible n'est pas standard et doit être expliquée.
- (b) La réponse à cette question a peu souvent été convenablement donnée. De nombreux candidats pensent qu'il faut que le polynôme caractéristique soit scindé à racines simples ou que  $A$  soit symétrique pour que  $A$  soit diagonalisable. Certains candidats affirment même que la matrice est symétrique réelle pour utiliser le théorème spectral.
- (c) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Comme dans la première question, les opérations effectuées sur les équations sont souvent omises. Il est dom-

mage que les candidats ne comparent pas le résultat obtenu avec ce qu'ils ont écrit à la question précédente (surtout ceux ayant conclu à "diagonalisable" et dans une moindre mesure, ceux n'ayant pas répondu). Un sous-espace propre réduit à  $\{0\}$  devrait faire réagir les candidats.

- (d) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Il fallait donner toutes les réponses et pas une seule. Les systèmes doivent se résoudre par équivalence.
  - (e) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Le fait que  $e_1$  et  $e_2$  se trouvent avec les questions précédentes a été globalement vu même si certains candidats ont refait le calcul. Il faut expliquer brièvement comment trouver  $e_3$ . Des erreurs de calcul pour ce dernier vecteur : le signe moins a été parfois oublié.
  - (f) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Un minimum d'explication est attendu. En particulier il fallait vérifier que la famille obtenue est une base :  $P$  n'est pas toujours inversible (les 3 colonnes sont dans  $x + z = 0$  ou une colonne de 0...). On trouve aussi la matrice de  $f$  dans  $(e_1, e_2, e_3)$  (qui est parfois mal construite : transposée). On voit des calculs inutiles qui interrogent sur la compréhension que ces candidats ont du changement de base.
2. (a) Moins d'un tiers des copies a eu la note maximale à cette question. La définition d'un sous-espace vectoriel est souvent non sue. Lorsque c'est le cas, la base et la dimension sont parfois manquantes. La justification que la famille génératrice obtenue est libre est très souvent absente. Rappelons que la non colinéarité des 3 vecteurs est insuffisante.
- Il arrive que dans la base, on trouve des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  et même des polynômes. Certains candidats affirment que  $\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 3$ .
- (b) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. L'écriture du produit de matrices "en triangle" est peu compréhensible sans aucun signe = : cette écriture ne devrait figurer qu'au brouillon. Il manque souvent la conclusion.
  - (c) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.
3. Dans cette question et la suivante, la majorité des candidats a travaillé avec des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  explicitées avec les coefficients  $(a, b, c)$ . Il était souvent plus rapide et efficace de garder la notation  $I + N$  avec  $N \in \mathcal{N}$ .
- (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. On voit souvent "de la même façon" on a un sous-espace vectoriel ou  $\mathcal{U}$  est un sous-espace vectoriel comme combinaison linéaire de sous-espaces vectoriels,  $I$  étant souvent l'un des ces sous-espaces.

Si  $(U, V) \in \mathcal{U}^2$  on ne peut pas conclure que  $U + \lambda V \notin \mathcal{U}$  (c'est vrai pour  $\lambda = 0$ ). Erreur plus subtile : certains candidats justifient que  $0 \notin \mathcal{U}$  car pour  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$  on a  $U \neq 0$  mais ce n'est pas suffisant pour conclure.

  - (b) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Bien que la définition de la stabilité par produit ait été rappelée à la question 2 (b), certains candidats vérifient que  $U^2 \in \mathcal{U}$ .
  - (c) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Un nombre important de candidats affirme que toute matrice triangulaire est inversible. Lorsque le déterminant est calculé, il est impératif de préciser qu'il est non nul pour conclure. De nombreux candidats calculent explicitement  $U^{-1}$ , ce qui n'était pas nécessaire. Certains affirment que  $\det(I + N) = \det(I) + \det(N)$ .
4. Quelques candidats n'ont pas compris que  $\alpha$  et  $\beta$  n'étaient pas nécessairement des entiers naturels : on voit des récurrences sur l'un ou l'autre ou des " $\alpha$  fois".

- (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Quelques confusions entre  $B$  et une matrice  $U$  générale. Il faut finir les calculs : les résultats comme somme de trois matrices ou avec  $\frac{4}{2}$  ne sont pas acceptables.
- (b) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. De fréquentes erreurs de calculs (oubli du  $ab$  notamment).
- (c) Moins d'un tiers des copies a eu la note maximale à cette question. De nombreuses "arnaques" : il fallait justifier par le calcul que le coefficient devant  $N^2$  était celui attendu : l'égalité  $\frac{\beta(\beta-1)}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \alpha\beta = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2}$  n'a rien d'évident. Beaucoup de candidats oublient le  $\alpha\beta ac$  mais concluent quand même à l'égalité demandée. Certains candidats renoncent à traiter la seconde égalité.
- (d) Moins d'un tiers des candidats a correctement traité cette question. Une récurrence bien rédigée est attendue. Les raisonnements du style "on voit bien que", "on a les propriétés des puissances" ou similaires ne sont pas suffisants. Nous retrouvons comme chaque année des erreurs dans la rédaction des récurrences (souvent mal rédigées), par exemple la propriété est supposée vraie pour tout  $n$  dans l'hérédité. L'initialisation est parfois faite pour  $n = 0$  ce qui pose problème dans l'hérédité où on utilise  $n = 1$ .
- (e) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. La méthode est souvent non connue des candidats. Oubli fréquent de vérifier que  $I$  et  $N$  commutent. Le traitement des cas particuliers  $n = 0$  et  $n = 1$  ne sont pas toujours convaincants.
- (f) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. De nombreuses méthodes intéressantes : utilisation de  $U^{(1+(-1))}$ , calcul de  $UU^{(-1)}$  ou calcul explicite de  $U^{-1}$ . Quelques candidats prennent  $n = -1$  dans les questions précédentes. La conclusion est souvent manquante.
5. (a) Moins d'un quart des candidats a correctement traité cette question. Il est indiqué d'utiliser la question 4 donc un calcul coefficient par coefficient n'est pas acceptable. Certains candidats parlent de  $B^{\frac{1}{2}}$  qui n'a aucun sens, contrairement à  $B^{(\frac{1}{2})}$ . L'unicité a souvent été mal comprise : les candidats exprimant une unicité dans  $\mathcal{U}$  et non dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
- (b) Moins d'un quart des candidats a correctement traité cette question. De nombreuses explications peu convaincantes : peu de candidats expriment la méthode pourtant classique de détermination d'une racine carrée.

## Exercice 2

Comme dit précédemment, il semble qu'un grand nombre de candidats a fait l'impasse sur les probabilités. Environ 10% des copies ne traitent pas du tout cet exercice ou n'ont aucun point.

### Partie 1

1. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Le support est souvent oublié, quand ce n'est pas la probabilité. La phrase "c'est une épreuve de Bernoulli donc... c'est une loi géométrique" est très souvent écrite mais c'est une réponse insuffisante : que comptent-on ? Les expériences sont-elles indépendantes ?
2. Moins d'un tiers des candidats a correctement traité cette question, pourtant classique.

De nombreuses affirmations du type  $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} (T \geq n)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(T = n), \prod_{n=1}^{+\infty} q^n = 0$  ou

encore  $\mathbf{P}(T \geq 1) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$  sans explication.

Certains candidats se rappellent qu'on peut utiliser le théorème de continuité décroissante mais introduisent une suite d'événements qui n'est pas monotone. Même lorsque la suite est bien introduite, le calcul de la probabilité et la justification de la limite par le théorème ne sont pas faites.

Certains candidats introduisent une variable aléatoire égale au nombre de succès. Si l'on passe par la loi géométrique, il faut expliquer en quoi  $\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(T = n) = 1$  donne le résultat attendu.

3. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. On voit souvent  $n$  à la place de  $N$ .
- (b) Question souvent non traitée même dans les meilleures copies. De nombreux candidats affirment que la fonction a un maximum en  $\frac{1}{2}$  en ayant uniquement  $f'(\frac{1}{2}) = 0$ . Un tableau de variation ou le signe de la dérivée est à minima attendu. De jolies méthodes dont celles recyclant les connaissances de seconde sur les paraboles "sourire" (ou comme ici "qui sont tristes").
- (c) Moins d'un quart des candidats a correctement traité cette question. La loi des grands nombres au programme ne donne pas immédiatement l'inégalité demandée : il fallait la reprouver à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (dont l'orthographe a bien été maltraitée) Certains candidats mélangent les noms des inégalités de probabilités.

## Partie 2

4. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Les explications doivent être claires et succinctes. Le sujet est parfois mal lu ou mal compris : si le joueur prend la pièce noire il ne reste pas  $n - M$  pièces dans le sac. La définition de "loi" est souvent mal sue : certains candidats pensent qu'il faut reconnaître une loi usuelle, d'où des lois de Bernoulli ou uniforme. Les expressions gain maximum et gain minimum sont ambiguës : il pourrait y avoir d'autres valeurs entre les 2. Attention à l'emploi du "il" dont on ne sait pas toujours s'il se rapporte au joueur ou à l'organisateur.
- (b) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.
5. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Le critère de d'Alembert est souvent malmené : oubli des valeurs absolues ou du passage à la limite. Des confusions entre le rayon de convergence et l'intervalle (ouvert) de convergence  
Quelques erreurs de signe dans la dérivée de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  ou confusions entre  $\ln(x)$  et  $\ln(1 \pm x)$ . La valeur en 0 est généralement omise.
6. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. La notion de probabilité conditionnelle a perturbé certains candidats qui sont revenus à la définition. On a parfois lu  $\mathbf{P}(T = n)(A)$  au lieu de  $\mathbf{P}_{(T=n)}(A)$  : les candidats sont invités à soigner la position des indices et exposants.
- (b) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait. Cependant, la formule des probabilités totales est parfois non sue, la justification souvent oubliée ou erronée (indépendance, incompatibilité uniquement). Le système complet d'événements est parfois  $(T_n)$  ou encore  $T(\Omega)$ .
7. (a) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait. Les explications sont souvent compliquées, incomplètes (inclusion uniquement) ou erronées.
- (b) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.

- (c) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait. Les candidats ayant traité cette question ont souvent considéré qu'il y avait deux formules différentes alors qu'il s'agit de la même, la différence provenant de la valeur de  $\mathbf{P}(T = n)$ .
- 8. (a) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait. Certains critères de comparaison nécessitent des séries positives, ce dernier point est régulièrement oublié.
- (b) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait. Beaucoup de candidats découpent la série sans justifier de la convergence des séries en jeu.
- 9. La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait. La question 9 (a) a souvent été mal réussie : la difficulté provenait du signe négatif de  $\ln(p)$ . Une justification des signes était attendue lors du calcul.

### Partie 3

- 10. (a) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
- (b) Question peu souvent correctement traitée. L'indépendance est souvent non citée ou alors le lemme des coalitions est cité à tort. Certains candidats parlent de l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $\mathbf{E}(XY) \leq \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ .
- (c) Question peu souvent correctement traitée. Oubli (presque) systématique de la précision  $X \geq 0$  pour utiliser l'inégalité de Markov, qui est donc appliqué à une variable aléatoire inadaptée.
- (d) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
- 11. Question peu souvent correctement traitée. Quelques rares candidats ont bien compris et expliqué le problème et les résultats obtenus.